

## 論文

외압을 받는 직등방성 중공 원통형 실린더의 임계하중 값에 미치는  
흡습에 기인한 천이 응력의 영향

정창범\*

**Influence of Transient Hygroscopic Stresses on the  
Critical Loads of a  
Hollow Orthotropic Circular Cylinder Loaded by External Pressure**

Chang-Bum Chung\*

## ABSTRACT

The stability of equilibrium of an orthotropic cylindrical shell subjected to external pressure in a hygrothermal environment is investigated. This problem is solved by using simultaneously the benchmark solution for buckling and the solution for boundary-layer transient hygroscopic stress derived from the three-dimensional elasticity. Globally, the hygroscopic boundary-layer and temperature distribution were found to have a negligible influence on the critical load.

## 초 록

흡습과 흡열 환경에서 외압을 받는 직등방성 원통형 쉘의 좌굴 현상이 연구되었다. 이 문제는 3차원 탄성학을 이용해서 구해진 좌굴에 대한 기준해와 흡습에 기인한 경계층 천이 응력에 대한 해를 동시에 고려하므로써 해결되었다. 전반적으로, 흡습과 열이 임계하중에 미치는 영향은 무시할만하였다.

## 1. 서 론

상대적으로 가벼운 복합재 구조물들에서는 안정성(stability)에 대한 문제가 커다란 관심사이다. 특히 성능이 향상된 복합재료(advanced composites)들은 소성 항복량이 적으며 무게 대비 강도가 크기 때문에 이러한 재료들을 사용할 때는 특히 안정성 문제가 심각하다.

혹독한 흡습 환경에서 이러한 재료들로 구성된 구조물을 안전하게 설계하기 위한 중요한 요구조건은 흡습 환경이 구조물에 미치는 영향과 특히 흡습에 기인한

응력의 영향을 충분히 이해하는 것이다.

Chung과 Kardomateas[1]는 Kardomateas의 수정된 변위[2]와 3차원 탄성학을 사용하여 흡습에 기인한 천이 응력(transient stress) 문제를 해석하였다. 그들은 시간과 두께 변화에 따른 습기함유율(moisture content)과 응력분포를 제시하였다.

Wang과 Choi[3]는 흔히 가장자리에서 시작되는 복합재 구조물의 예기치 못했던 파손의 주 원인은 경계층 흡습 응력이라고 보고하고 있다. Kardomateas와 Chung[4]은 습기 확산 과정이 상대적으로 느리기 때문에 표면의 경계층 영역안에서 실제 시간동안 흡습응

\*삼성항공 항공우주연구소

력이 제한된다고 설명하였다. 그들의 결과들은 경계층 영역 안에서 섬유들의 횡방향 응력이 흡습에 가장 영향을 받는다는 것을 보여주었다.

Snead와 Palazotto[5]는 유한요소법으로 축방향 하중을 받는 얇은 원통형 복합재 패널들의 불안정성 (instability)에 미치는 습기와 온도의 영향을 조사하였다. 그들은 시험을 통하여 얻은 흡습과 온도에 의해 저하된 탄성계수와 전단계수를 사용하였다. 그들은 그 해석을 통하여 습기농도와 온도가 증가할 때 임계하중 값이 저하되며 역시 패널의 적층각에 따라 그 값도 영향을 받는다고 결론지었다. Lee와 Yen[6]도 비슷한 문제에 대해서 유한요소법으로 해석을 진행하였다. 그들은 고전 쉘 이론에 횡방향 전단 변형의 영향을 함께 고려하였다. 그들의 결과도 Snead와 Palazotto[5]의 결과들과 일치하였다.

Kardomateas와 Chung[7]은 직등방성 쉘이 흡습 환경에서 외압을 받을 때 평형 안정성 문제를 조사하였다. 그들은 Snead[5]와 Lee[6]의 결과들과는 반대로 흡습 경계층 응력은 임계하중에 영향을 거의 미치지 않음을 보여주었다. 그들은 Snead와 Palazotto[5]의 결과는 이미 저하된(degraded) 횡방향 탄성계수와 전단계수를 사용한 해석을 수행하므로써 얻은 결과라고 결론지었다.

이 논문에서는 외압을 받는 직등방성 중공 원통형 쉘의 임계점(critical point)에 미치는 흡습과 열에 기인한 천이응력들의 영향을 연구한다. 이전 논문(Kardomateas와 Chung[7])처럼 링(ring)으로 가정한 근사해석과는 달리 여기서는 좌굴모드가 3 차원 좌표들에 의존하며 축방향 변위도 영이 아니라고 가정하였다. 내외부 면에서 습기농도는 일정하나 각각 다른 값을 가지며, 재료 물성치들은 습기농도에 독립적이라고 가정하였다. 원통 쉘의 크기 및 시간, 습기농도와 온도들의 변화가 임계하중에 미치는 영향이 연구되어진다.

### 2. 이론 해석

이 논문에는 일정하게 분포된 외압  $p$ 에 의해서 변형되는 양쪽 끝이 막혀있는 중공 실린더에 대한 문제를 고려한다(Fig. 1). Kardomateas와 Chung[4]의 해석에 따라서, 초기 평형상태(좌굴이 발생하기 전의 평형상태)에 대한 흡습에 기인한 응력분포를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_{rr}^0(r,t;p) = c_{11} \frac{\partial U(r,t;p)}{\partial r} + c_{12} \frac{U(r,t;p)}{r} + c_{13}f(t) - q_1 C(r,t), \dots \dots \dots (1a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0(r,t;p) = c_{12} \frac{\partial U(r,t;p)}{\partial r} + c_{22} \frac{U(r,t;p)}{r} + c_{23}f(t) - (q_1 - q_2)C(r,t), \dots \dots \dots (1b)$$

$$\sigma_{zz}^0(r,t;p) = c_{13} \frac{\partial U(r,t;p)}{\partial r} + c_{23} \frac{U(r,t;p)}{r} + c_{33}f(t) - q_3 C(r,t), \dots \dots \dots (1c)$$

여기서  $t$ 는 시간,  $c_{ij}$ 는 탄성계수,  $C(r,t)$ 는 습기농도 (moisture concentration) (wt%),  $\beta_j$  팽창계수 (swelling coefficients),  $U(r,t)$ 는 반지름 방향 변위를 나타내며

$$q_1 = c_{11}\beta_r + c_{12}\beta_\theta + c_{13}\beta_z, \dots \dots \dots (1d)$$

$$q_2 = (c_{11} - c_{12})\beta_r + (c_{12} - c_{22})\beta_\theta + (c_{13} - c_{23})\beta_z, \dots \dots (1e)$$

$$q_3 = c_{13}\beta_r + c_{23}\beta_\theta + c_{33}\beta_z, \dots \dots \dots (1f)$$

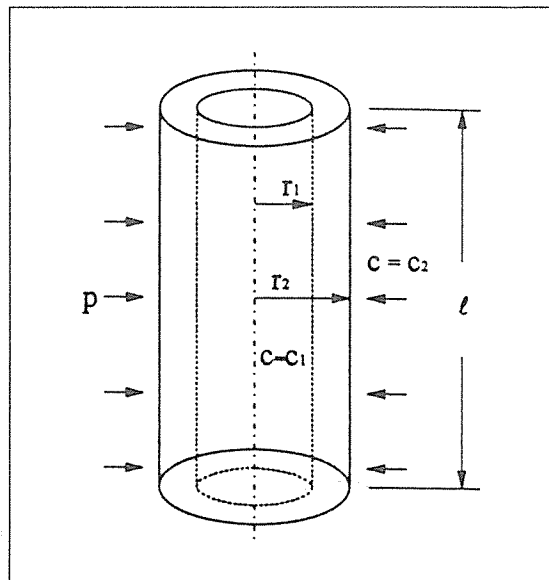


Fig. 1. Cylindrical Shell under Constant Boundary Concentrations of Moisture

$c_{11} \neq c_{22}$ 인 경우에  $U(r,t;p)$ 와  $f(t)$ 에 대한 표현식들은 다음과 같은 형식을 갖는다[4].

$$U(r,t;p) = (U_{c1} + pU_{a1})r^k + (U_{c2} + pU_{a2})r^{-k} + U_0^*(r) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D a_n^2 t} [G_{1n} r^k + G_{2n} r^{-k} + R_n^*(r)], \quad (2a)$$

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D a_n^2 t} f_n; \quad k = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}, \dots \dots \dots (2b)$$

여기서  $U_{ci}, U_{ai}(i=1,2), f_0, f_n, G_{1n}$ 와  $G_{2n}$ 들은 경계 조건들로부터 구해지는 상수들이며,  $U_0^*(r)$ 와  $R_n^*(r)$ 들은 특별해들이다.  $D$ 는 습기확산계수(moisture diffusivity)를 나타내며,  $a_n$ 들은 다음 식의 양근들(positive roots)을 나타낸다.

$$J_0(r_1 \alpha_n) Y_0(r_2 \alpha_n) - J_0(r_2 \alpha_n) Y_0(r_1 \alpha_n) = 0. \dots \dots \dots (2c)$$

좀더 세부적인 해석은 Kardomateas와 Chung의 논문들[4,7]에 상세히 기술되어 있다.  $U_0^*(r), R_n^*(r), G_{1n}$ 과  $G_{2n}$ 들은 외압  $p$ 에 대하여 독립적이지만 사실상 식(2)로부터 초기 평형상태에서의 변형은 외압  $p$ 에 선형적으로 의존함을 알 수 있다. 이 사실은 수치해석 시  $\sigma_{rr}^0(r,t;p)$ 와  $\sigma_{\theta\theta}^0(r,t;p)$ 들을  $p$ 에 대해서 미분할 때 필요하며, 이 관계는  $p$ 에 대한 미분을 수행하지 않고도 직접 식(2)로부터 구할 수 있다.

좌굴 발생 후 평형 모드는 다음 식과 같은 형태로 찾을 수 있다[8].

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta, z) &= A(r) \cos n\theta \sin \lambda z; \\ v_1(r, \theta, z) &= V(r) \sin n\theta \sin \lambda z, \\ w_1(r, \theta, z) &= W(r) \cos n\theta \cos \lambda z, \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

여기서  $u_1, v_1, w_1$ 은 좌굴 발생 후 변위의 각각  $r, \theta, z$ 성분들이며, 함수  $A(r), V(r), W(r)$ 들은  $n$ 과  $\lambda$ 의 각 조합에 의해서 결정될 수 있다. 좌굴 방정식들에 식(3)을 대입하므로써(Kardomateas와 Chung의 논문 [8]중 식(5)를 참조), 우리는  $r_1 \leq r \leq r_2$ 인 경우에  $A(r), V(r)$ 과  $W(r)$ 에 대해서 다음과 같은 선형 순수 상미분 방정식(linear homogeneous ordinary differential equation)들을 얻는다.

$$A(r)'' c_{11} + A(r)' \frac{c_{11}}{r} + A(r)$$

$$\left[ -c_{55} \lambda^2 - \frac{c_{22} + c_{66} n^2}{r^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\lambda^2}{2} - \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{n^2}{2r^2} \right]$$

$$+ V(r)' \left[ \frac{(c_{12} + c_{66})n}{r} - \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{n}{2r} \right]$$

$$+ V(r)' \left[ \frac{-(c_{22} + c_{66})n}{r^2} - \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{n}{2r^2} \right]$$

$$+ W(r)' \left[ -(c_{13} + c_{55})\lambda + \sigma_{zz}^0 \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$+ W(r) \frac{(c_{23} - c_{13})\lambda}{r} = 0, \dots \dots \dots (4a)$$

$$V(r)'' \left( c_{66} + \frac{\sigma_{rr}^0}{2} \right) + V(r)'$$

$$\left[ -\frac{c_{66}}{r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^0 - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0}{2}) + \frac{\sigma_{rr}^0}{2} \right] + V(r)' [-c_{44} \lambda^2 - |$$

$$\left[ \frac{c_{66} + c_{22} n^2}{r^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0}{2r^2} + \frac{\sigma_{rr}^0}{2r} \right]$$

$$+ A(r)' \left[ \frac{-(c_{12} + c_{66})n}{r} - \sigma_{rr}^0 \frac{n}{2r} \right]$$

$$+ A(r) \left[ \frac{-(c_{22} + c_{66})n}{r^2} - \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{n}{2r^2} + \sigma_{rr}^0 \frac{n}{2r} \right]$$

$$+ W(r) \left[ (c_{23} + c_{44}) \frac{n\lambda}{r} - \sigma_{zz}^0 \frac{n\lambda}{2r} \right] = 0, \dots \dots \dots (4b)$$

$$W(r)'' \left( c_{55} + \frac{\sigma_{rr}^0}{2} \right) + W(r)' \left[ \frac{c_{55}}{r} + \frac{\sigma_{rr}^0}{2r} + \frac{\sigma_{rr}^0}{2} \right]$$

$$+ W(r) \left[ -c_{33} \lambda^2 - c_{44} \frac{n^2}{r^2} - \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{n^2}{2r^2} \right]$$

$$+ A(r)' \left[ (c_{13} + c_{55})\lambda - \sigma_{rr}^0 \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$+ A(r) \left[ \frac{(c_{23} + c_{55})\lambda}{r} - \sigma_{rr}^0 \frac{\lambda}{2r} - \sigma_{rr}^0 \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$+V(r) \left[ (c_{23} + c_{44}) \frac{n\lambda}{r} - \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{n\lambda}{2r} \right] = 0 \dots\dots\dots(4c)$$

이번에는 원통 실린더의 측면(lateral surface)에서의  $(r=r_j, j=1,2)$  경계조건들을 고려한다. 경계조건들은 (Kardomateas와 Chung의 논문[8] 식(8)을 참조)

$$A'(r_j)c_{11} + [A(r_j) + nV(r_j)] \frac{c_{12}}{r_j} - c_{13}\lambda W(r_j) = 0, \dots\dots\dots(5a)$$

$j=1,2$

$$V'(r_j) \left[ c_{66} + (\sigma_{rr}^0 + p_j) \frac{1}{2} \right] + [V(r_j) + nA(r_j)] \left[ -c_{66} + (\sigma_{rr}^0 + p_j) \frac{1}{2} \right] \frac{1}{r_j}, \dots\dots\dots(5b)$$

$j=1,2$

$$\lambda A(r_j) \left[ c_{55} - (\sigma_{rr}^0 + p_j) \frac{1}{2} \right] + W'(r_j) \left[ c_{55} + (\sigma_{rr}^0 + p_j) \frac{1}{2} \right], \dots\dots\dots(5c)$$

$j=1,2$

여기서  $j=2$  즉,  $r=r_2$ (바깥면 경계)에서  $p_j=p_0$ 이며,  $j=1$  즉,  $r=r_1$ (안쪽면 경계)에서는  $p_j=0$ 이다.

모든 탄성학 요구조건들을 만족하기 위해서는 우리는 중공 실린더 양끝단에서의 경계조건들을 고려해야만 한다. Kardomateas와 Chung은 양끝단에서  $x$ -와  $y$ - 방향 합력들을 고려하면 이 조건들은 평균적으로 만족된다는 것을 보여주었다[8].

하나의 주어진 시간에 대해서 식(4)와 (5)들은 매개 변수  $p$ 를 가진,  $r$ 변수에 대한 2차 선형 상미분 방정식들로써 하나의 고유치(eigenvalue) 문제를 구성한다. 이것은 표준 2점 경계 값 문제(standard two point boundary value problem)이다. 위의 미분방정식들을 풀기 위해서 쉘의 두께 방향에 따른 각 그리드(grid) 점들에서 유한차분(finite difference) 방정식을 사용하는 이완법(relaxation method) 이 사용되었다(Press et al.[9]).

수치해석 과정은 Kardomateas와 Chung[8]의 논문에 설명되어있다. 다음 장에서는 본 이론식들의 수치해석 결과들을 설명하였다.

### 3. 결과 및 토의

다음과 같은 물성치들을 갖는 전형적인 탄소섬유/에폭시 복합재료에 대하여 무차원 임계 압력  $\tilde{p} = pr_2^3 / (E_2 h^3)$ 에 대한 결과들이 해석되었다.

$E_1 = 9.9 \text{ GN/m}^2, E_2 = 140.0 \text{ GN/m}^2, E_3 = 9.1 \text{ GN/m}^2, G_{12} = 4.7 \text{ GN/m}^2, G_{23} = 4.3 \text{ GN/m}^2, G_{31} = 5.9 \text{ GN/m}^2, \nu_{12} = 0.02, \nu_{23} = 0.30, \nu_{31} = 0.49,$

여기서, 1은 반지름 방향( $r$ ), 2는 원주 방향( $\theta$ )들이며 3은 축 방향을 나타낸다. 섬유방향(fiber direction)은 원주 둘레 방향으로 가정되었다.

흡습 팽창 계수(hygroscopic expansion coefficients)  $\beta_r$ 과  $\beta_z$ 는  $6.67 \times 10^{-3} / \text{wt}\%$  이며,  $\beta_\theta$ 는 0을 사용하였다. 이 재료에 대한 반지름 방향 습기 확산 계수(moisture diffusivity)  $D$ 는  $2.145 \times 10^{-13} \text{ m}^2/\text{sec}$  이며, 열 팽창 계수  $\alpha_r$ 은  $4 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_\theta$ 는  $1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_z$ 는  $4 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$  이며, 반지름 방향 열확산 계수

Table 1. Hygroscopic Effects on the Critical Pressure for Graphite/Epoxy Orthotropic Composite Shell with Circumferential Reinforcement,  $l/r_2=10$   
Critical Pressure,  $\tilde{p} = pr_2^3 / (E_2 h^3)$   
Moisture Concentrations : initial, at  $t=0 : C_0=0.1$ ,  
at  $t>0 : C_1$  (at  $r_1$ )= $1.0, C_2$  (at  $r_2$ )= $1.5$   
Capped Ends ( $M=241$ )

$r_2$ (meter)	$r_2/r_1$	Time(days)	With Moisture Effects	Without Moisture Effects
0.05	1.05	1	0.2576	0.2576 (n=2, m=1)
		50	0.2576	
		$\infty$	0.2576	
	1.15	1	0.2347	0.2347 (n=2, m=2)
		50	0.2347	
		$\infty$	0.2346	
	1.25	1	0.1978	0.1978 (n=2, m=3)
		50	0.1978	
		$\infty$	0.1976	
5.0	1.05	1	0.2576	0.2576 (n=2, m=1)
		50	0.2576	
		$\infty$	0.2576	
	1.15	1	0.2347	0.2347 (n=2, m=2)
		50	0.2347	
		$\infty$	0.2346	
	1.25	1	0.1976	0.1978 (n=2, m=3)
		50	0.1976	
		$\infty$	0.1976	

$k$ 는  $1.12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$ 이다.

Table 1과 2들은 각기 다른 크기, 시간, 습기 농도에 따른 증공 적등방성 실린더의 임계 하중에 미치는 흡습의 영향을 보여주고 있다.  $r_2=0.05\text{m}$ 와  $5.0\text{m}$ 인 모든 경우 임계하중에 미치는 흡습의 영향은 무시될 수 있었다.  $r_2=0.05\text{m}$ 인 형상에 대하여 임계 하중 값들은 시간이 무한대에 접근할 때 즉, 정상 상태(steady state)에 이를 때 흡습의 영향을 받지 않는 경우에 대한 임계 하중값들에 이르기까지 증가하고 있다.  $r_2/r_1=1.15$ 와  $1.25$ 인 경우에 임계 하중 값들은 시간이 무한대에 접근할 때 습기의 영향을 받지 않는 경우의 임계 하중 값보다 더 작음을 보여주고있다. 그러나, 모든 경우에서 임계하중 값들의 변화가 상당히 적었기 때문에 이러한 경향들은 무시할 수 있었다.

Table 1 ( $C_1=0.1$ )과 Table 2 ( $C_1=0.2$ )들은 임계 하중에 미치는 습기의 농도에 의한 영향을 보여주고있다. 초기 농도가  $C_1=0.2$ 에서  $C_1=1.0$ 으로 급격히 증

가하였을 때 임계하중 값들은 좀 더 감소하였지만, 그 변화량은 역시 상당히 작아서 그 영향은 역시 무시할 수 있었다.

Table 3은 임계 하중에 미치는 온도 분포의 영향을 보여준다. 비록 온도 분포가 평형상태에 도달하는 것이 상대적으로 습기분포에 기인한 것보다는 빠르다고 할 지라도 임계하중에 미치는 온도의 영향은 역시 무시될 수 있었다.

전반적으로, 임계하중에 미치는 흡습과 온도에 기인한 영향은 무시할만 하였다. Snead와 Palazotto[5] 그리고 Lee와 Yin[6]들의 결과들은 즉, 흡습과 열에 기인하여 임계 하중 값들이 감소한다는 것은 그들이 가정한 흡습과 열에 의하여 저하된(degraded) 재료 물성치들을 사용함에 기인한 것이다. 결론적으로, 이 연구에서는 흡습과 온도에 기인한 임계하중의 감소 현상은 재료의 물성치저하에 기인한 것이지 흡습에 기인한 응력 분포에 기인한 것은 아니라는 사실을 보여주었다.

Table 2. Hygroscopic Effects on the Critical Pressure for Graphite/Epoxy Orthotropic Composite Shell with Circumferential Reinforcement,  $l/r_2=10, r_2=5.0\text{m}$   
Critical Pressure,  $\tilde{p} = pr_2^3/(E_2 h^3)$   
Moisture Concentrations : initial, at  $t=0 : C_0=0.1$ ,  
at  $t>0 : C_1(\text{at } r_1)=0.2, C_2(\text{at } r_2)=1.5$   
Capped Ends ( $M=241$ )

$r_2/r_1$	Time (days)	With Moisture Effects	Without Moisture Effects
1.25	1	0.1978	0.1978 (n=2, m=3)
	50	0.1978	
	$\infty$	0.1978	

Table 3. Thermal Effects on the Critical Pressure for Graphite/Epoxy Orthotropic Composite Shell with Circumferential Reinforcement,  $l/r_2=10$   
Critical Pressure,  $\tilde{p} = pr_2^3/(E_2 h^3)$   
Moisture Concentrations : initial, at  $t=0 : T_0=0.0^\circ\text{C}$ ,  
at  $t>0 : T_1(\text{at } r_1)=50.0^\circ\text{C}, T_2(\text{at } r_2)=5.0^\circ\text{C}$ ,  
Thermal Diffusivity :  $k=0.112 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$   
Capped Ends ( $M=241$ )

$r_2$ (meter)	$r_2/r_1$	Time(days)	With Moisture Effects	Without Moisture Effects
5.0	1.05	1	0.2576	0.2576 (n=2, m=1)
		50	0.2576	
		$\infty$	0.2576	
	1.25	1	0.1977	0.1978 (n=2, m=3)
		50	0.1977	
		$\infty$	0.1977	

### 참 고 문 헌

1. C.B. Chung and G.A. Kardomateas, "Moisture Induced Transient Stresses in Orthotropic, Thick Shells under External Pressure," SECTAM XVI Conference, Nashville, TN, pp. II.15.1-II.15.8, April 1991.
2. G.A. Kardomateas, "Transient Thermal Stresses in Cylindrically Orthotropic Composite Tubes," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 56, Jun. 1989, pp. 411-417.
3. S.S. Wang and I. Choi, "Boundary-Layer Hygroscopic Stresses in Angle-Ply Composite Laminates," AIAA Journal, Vol. 20, No. 11, November, pp. 1592-1598.
4. G.A. Kardomateas and C.B. Chung, "Boundary-Layer Transient Hygroscopic Stresses in Orthotropic Thick Shells under External Pressure," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 61, March 1994, pp. 161-168.
5. J.M. Snead and A.N. Palazotto, "Moisture and Temperature Effects on the Instability of Cylindrical Composite Panels," J. Aircraft, Vol. 20, No. 9, Sep. 1983, pp. 777-783.

6. S.Y. Lee and W.J. Yen, "Hygrothermal Effects on the Stability of a Cylindrical Composite Shell Panel," ASME, Aerospace Division(publication) AD Vol. 13, published by ASME, New York NY, 1988, pp. 21-31.

7. G.A. Kardomateas and C.B. Chung, "Buckling of a Thick Orthotropic Cylindrical Shell under External Pressure Including Hygroscopic Effects," AMD-Vol. 162, Mechanics of Thick Composites, ASME, pp. 213-226, presented at The 1st Joint Mechanics Meetings of ASME ·

ASCE · SES - MEET'N'93, Charlottesville, Virginia, June 6-9, 1993.

8. G.A. Kardomateas and C.B. Chung, "Buckling of Thick Orthotropic Cylindrical Shells Under External Pressure Based on Non-Planar Equilibrium Modes," Int. J. Solids Structures, Vol. 31, No. 16, 1994, pp. 2195-2210.

9. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, "Numerical Recipes," published by Cambridge University Press, Cambridge.