

## 論文

## 끝단 질량이 부착된 복합재료 날개의 진동특성

이정진\* · 이 인\*\*

## Vibration Characteristics of Composite Wing with Tip Mass

Jung-Jin Lee\* and In Lee\*\*

## ABSTRACT

The analysis of vibration characteristics including the natural frequencies and modes for various shaped composite wings with tip mass and engine has been performed using the finite element method based on the shear deformable theory. The present analysis presents the effect of sweptback angle, fiber orientation and aspect ratio of a composite wing on vibration characteristics. The wing is composed of graphite/epoxy laminate with symmetric stacking sequence. In case of  $[\theta_2/0]$ , composite wing, bending-torsion modes are highly coupled in the range of  $15^\circ - 30^\circ$  for fiber orientation  $\theta$ . As  $\theta$  increases, the lowest mode, which can always be characterized as first bending, reduces due to the decrease in spanwise bending stiffness. The present finite element method which uses 8-node quadrilateral elements give very accurate results.

## 초 록

진단변형 이론에 근거한 유한요소법을 이용하여 익단 질량 및 엔진이 부착된 여러 형태의 복합재료 날개에 대한 진동 특성을 해석하였다. 본 연구에서는 대칭 적층판으로 구성된 graphite/epoxy 평판 날개의 뒤계침각과 섬유방향의 변화 그리고 중횡비에 따른 진동 특성을 살펴보았다.  $[\theta_2/0]$ 로 적층한 날개의 경우, 섬유방향이  $15^\circ - 30^\circ$  사이에서 굽힘과 비틀림의 모우드가 강하게 연계된다. 그리고 섬유방향  $\theta$ 가 증가함에 따라 첫번째 모우드는 항상 굽힘 모우드이며, 스펠방향의 강성 감소로 굽힘 모우드의 고유진동수는 감소한다. 본 논문에서 수행된 유한요소법은 8절점 등계수 요소를 사용하고 있으며, 매우 정확한 결과를 주었다.

\* 정회원, 한국항공우주연구소

\*\* 정회원, 한국과학기술원 항공공학과

### 1. 서 론

현대의 항공기는 다양한 용도와 성능의 향상이 요구되고 경량화도 에너지 절약이나 항공기 적재 능력의 향상이라는 측면에서 대단히 중요한 요인으로 작용한다. 이러한 이유때문에 무게에 비해 강성(stiffness)과 강도(strength)가 높고 섬유방향(fiber orientation)과 단층(lamina)의 적층순서(stacking sequence)에 따라 원하는 이방성 성질을 갖는 복합재료는 항공기 날개나 프로펠러 blade의 공력 탄성학적 테일러링에 크게 이용된다. 공력 탄성학적 테일러링(aeroelastic tailoring)은 항공기의 공기 역학적인 성능과 구조적인 성능을 높이기 위하여 방향 강성(directional stiffness)을 적절하게 바꾸어 줌으로써 굽힘(bending)과 비틀림에 대한 공력 탄성학적 특성을 좋게 하도록 설계하는 기술을 말한다. 이를 위해서는 고유진동수와 고유진동 모우드들 정확하게 예측하고, 또한 굽힘과 비틀림이 연계(coupling)된 coupled-mechanism에 대한 근본적인 이해가 필요하다.

항공기의 날개를 3차원 구조물로 해석하는 것은 매우 복잡하므로 비교적 간단한 2차원 cantilevered 평판으로 가정하여 두께의 영향을 무시하고 해석한 고전 적층판 이론(CPT)을 통하여 많은 연구가 이루어져 왔다. 그러나 평판 형태의 복합재료의 경우에 두께의 영향은 등방성 재료의 경우에 비하여 심각하게 나타난다. 이 결과로 인하여 횡 전단 변형(transverse shear deformation) 효과를 무시하고 해석한 고전 적층판 이론(CPT)에 의한 고유진동수는 전단 변형과 회전 관성효과를 고려한 Mindlin의 평판이론에 의한 결과보다 크게 나타난다[1]. 그리고 고전 적층판 이론(CPT)에 의한 해석에서는 혼합 수식화(mixed formulation)가 불가능하며 C' 이상의 유한요소를 사용해야 하는 단점이 있다.

지금까지 전단 변형과 회전 관성의 효과를 고려한 많은 이론이 제안되어 왔다. 전단변형 이론은 Mindline[1]의 등방성 평판이론을 근거로 해서 Stavsky [2]의 등방성 적층 평판에 대한 이론을 필두로 하여 Yang과 Norris 그리고 Stavsky[3]가 Stavsky의 이론을 임의로 적층한 이방성 평판에 적용하여 일반화

하였다. Whitney와 Pagano[4], Bert와 Chen[5], Reddy[6] 등은 YNS 이론을 이용하여 복합 적층판에 적용하여 해석하였다. 그리고 Lakshminarayana[7]은 TRIPLT 요소를 사용하여 뒤제침각(sweptback angle)이 30°인 사다리꼴형 평판 날개에서 고유진동수를 구했고, 또한 실험으로 측정했다.

본 논문에서는 선형이론을 따르는 전단변형 이론에 기반을 둔 8-node 사변형 유한요소(quadrilateral finite element)를 사용하여 익근(wing root)과 익단(wing tip)의 1/2 chord를 연결하는 선을 주축(principal axis)으로 한 사각 평판날개에서 중회비와 익단 질량이 부착한 경우의 진동 특성을 살펴 보았다. 또한  $[\theta_2/0]_s$  적층판에서 뒤제침각이 없는 경우( $\Lambda=0^\circ$ )와 뒤제침각  $\Lambda$ 가 15° 일때  $\theta$ 의 변화에 따른 고찰뿐만 아니라 엔진이 1/4 chord와 span의 중앙에 위치한 경우와 익단 질량(tip mass)이 부착된 경우의 진동특성을 고찰하였다.

### 2. 유한요소 해석

평판에 대한 변형 에너지(strain energy) U와 운동 에너지(kinetic energy) T는

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega dz \dots\dots\dots (1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I \left[ \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (2)$$

여기서 w는 평판의 수직변위이고  $\phi_x$ 와  $\phi_y$ 는 각각 평판내에 직교하는 두 축(x와 y축)에 관한 회전이다. 식(1)을 복합적층판에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 \\
 U_1 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + 2D_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 &\quad + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \left( D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2D_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \left( D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right. \\
 &\quad + 2D_{26} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \left. \right) + 2D_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + D_{22} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 \\
 &\quad \left. + 2D_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right\} d\Omega \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ [A_{35} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right)] \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + [A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right)] \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \right\} d\Omega \quad \dots\dots\dots (4)$$

여기서  $A_{ij}$ 와  $D_{ij}$ 는 각각 인장강성(extensional stiffness)과 굽힘강성(bending stiffness)이다. 평판에 작용하는 하중이 없는 경우에, Hamilton's Principle을 적용하여 운동방정식을 얻을 수 있다.

날개의 끝에 연로탱크와 같은 집중질량이 붙어 있는 경우의 동적특성을 해석하기 위하여 익단 질량(tip-mass)을 균일한 보(uniform beam)라고 가정하자. 굽힘 변형과 전단 변형 및 회전 관성을 고려한 보에 대한 변형 에너지(strain energy)와 운동 에너지(kinetic energy)는 다음과 같다.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{\ell} E_b I_b \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\ell} G_b A_b k' \left( \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$T_b = \frac{1}{2} \int_{\ell} \left\{ \rho_b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho_b k^2 \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} dy \quad \dots\dots\dots (6)$$

여기서  $E_b I_b$ 와  $G_b A_b k'$ 은 보(beam)의 굽힘과 전단 강성을 나타내며,  $k$ 와  $\rho_b$ 는 각각 중립축에 관한 gyration의 반경( $k^2 = I_b / A_b$ )과 보(beam)의 밀도를 의미한다. 또한 하첨자  $b$ 는 보(beam)를 뜻한다.

Lagrangian  $L = T - U$ 에 대한  $\delta L = 0$ 의 변분법을 이용하여 유한요소의 수식화를 하자. 본 연구에서는 횡방향의 변위  $w$ 와  $x$ ,  $y$ 축을 중심으로한 회전각  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ 에 각각 독립된 형상함수(shape function)를 사용하여 2차원 판 요소로 모델링한 유한요소의 접근방식을 취했다[6]. 그리고 다음과 같이 무차원 계수를 정의하자.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= A_{ij} / E_2 h, \quad d_{ij} = D_{ij} / E_2 h^3, \quad R = a / b \\ S &= a / h, \quad \xi = x / a, \quad \eta = y / b, \quad \bar{w} = w / h \\ \mu &= m_b / M_p, \quad \lambda^2 = \rho \omega^2 a^4 / E_2 h^2 \\ \alpha &= E_b I_b / E_2 h^3 b, \quad \beta = G_b A_b k' / E_2 h b \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

여기서  $m_b$ 와  $M_p$ 는 각각 보(beam)와 평판의 질량을 말하며, 형상함수(shape function)를 이용하여 무차원 변수  $\bar{w}$ ,  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ 를 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{w} = \sum_i \psi_i \bar{w}_i, \quad \phi_x = \sum_i \psi_i \phi_x^i, \quad \phi_y = \sum_i \psi_i \phi_y^i \quad \dots\dots\dots (8)$$

단순 조화 운동(Simple Harmonic Motion)이라 가정하면

$$\bar{w} = e^{i\omega t} \bar{w}, \quad \phi_x = e^{i\omega t} \phi_x, \quad \phi_y = e^{i\omega t} \phi_y \quad \dots\dots\dots (9)$$

위의 식(7), 식(8)와 식(9)을 변분  $\delta L = 0$ 에 적용하여 정리하면 다음과 같은 고유치 문제(eigenvalue problem)의 강성 행렬식과 질량 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[K] + [k_b] \{X\} = \lambda^2 (1 + \mu) [M] \{X\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

여기서  $\{X\}^T$ 는  $\{\bar{w}, \phi_x, \phi_y\}$ 를 뜻하며  $[K]$ 와  $[k_b]$ 는 각각 평판과 보에 대한 강성 행렬이며,  $[M]$ 은 평판의 질량 행렬을 나타낸다. 그리고  $\mu$ 는 평판에 대한 보의 질량비 즉  $m_b / M_p$ 를 의미한다.

### 3. 수치계산 및 검토

Fig. 1과 같은 날개에서 테이퍼비(taper ratio)가 1이고 뒤제침각(sweptback angle)  $\Lambda = 0^\circ$ 일때, 즉 사각 평판날개에서 Table 1과 같은 물성치를 갖는 재료에 대하여  $[0_2 / \pm 30]_s$  graphite/epoxy의 종횡비(aspect ratio)에 따른 진동특성과 노달 패턴을 그림 2에서 보여주고 있다. 첫번째 모드인 굽힘 모우드는 종횡비에 관계없이 거의 일정하다. 두번째 모우드는 비틀림 모우드로서 종횡비가 증가하면 고유진동수도 증가한다. 세번째 모우드와 네번째 모우드의 고유진동수는 종횡비가 1.6에서 접근한다. 그리고 평판 날개 질량의 10%에 해당하는 질량이 익단에 부착된 경우( $\mu = 0.1$ ), 굽힘과 비틀림 모우드의 고유진동수는 익단 질량의 영향으로 감소하지만 chordwise 모우드의 고유진동수는 시위 방향 강성도(chordwise rigidity)로 인하여 증가하며, 고차 모우드가 됨을 알 수 있다.

Table 2에서 종횡비가 각각 1(3in×3in×0.041in)과 2(6in×3in×0.041in)인 사각형태의 graphite/epoxy 적층판과 알루미늄의 평판에 대하여 유한요

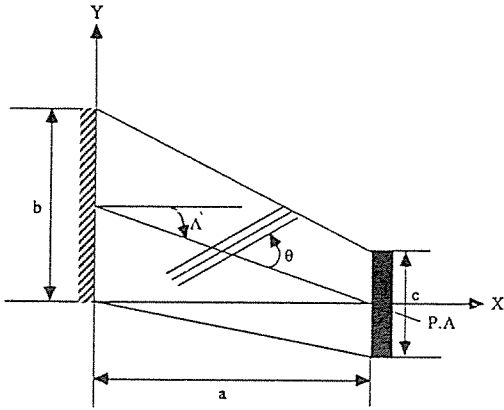


Fig. 1 Geometry of a sweptback wing with tip mass.

Table 1. Material Properties

Properties	Aluminum	E-glass/Epoxy	H.S. Graphite/Epoxy
$E_1$ (psi)	$10.0 \times 10^6$	$5.6 \times 10^6$	$18.6 \times 10^6$
$E_2$ (psi)	$10.0 \times 10^6$	$1.2 \times 10^6$	$1.6 \times 10^6$
$G_{12}$ (psi)	$3.8 \times 10^6$	$0.6 \times 10^6$	$0.65 \times 10^6$
$G_{13}$ (psi)	$3.8 \times 10^6$	$0.6 \times 10^6$	$0.65 \times 10^6$
$G_{23}$ (psi)	$3.8 \times 10^6$	$0.6 \times 10^6$	$0.222 \times 10^6$
$\nu_{12}$	0.3	0.26	0.25
(lb/in <sup>3</sup> )	0.1	0.092	0.055

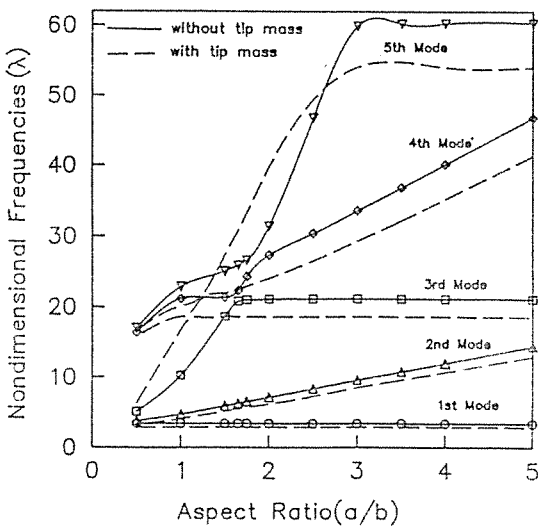
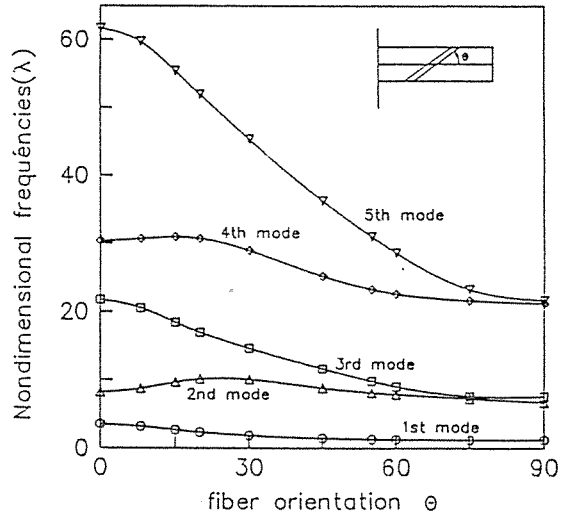
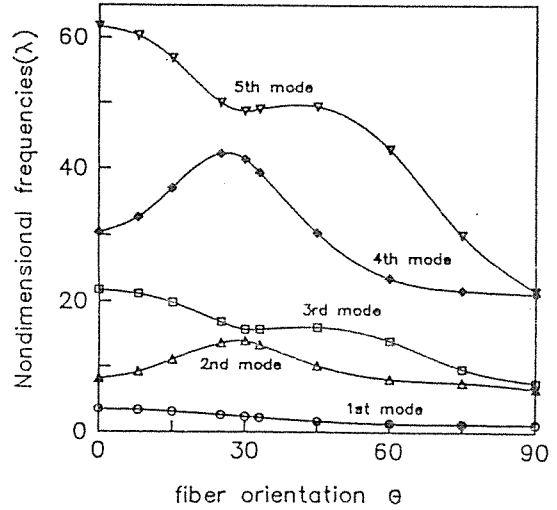


Fig. 2 Variation of frequency parameter ( $\lambda$ ) on aspect ratio of  $[0_2/\pm 30]_s$  graphite/epoxy plate.



(a)  $[0_2/0]_s$  laminate



(b)  $[\pm\theta/0]_s$  laminate

Fig. 3 Variation of frequency parameter ( $\lambda$ ) on fiber orientation of graphite/epoxy unswept-rectangular wing ( $\Delta=0^\circ$ ).

소범에 대한 검증을 하였다. 본 논문의 8절점  $4 \times 2$  요소를 가진 유한요소법(111-DOF)은 매우 적은 자유도를 가지고도 고차 모우드(4th-mode 또는 5th-mode)의 고유진동수까지 Crawley의 유한요소법 결과(365-DOF)와 실험치에 매우 잘 일치한다.

Table 2. Natural Frequencies fo Rectangular Cantilevered Plates (Unit=Hz)

Laminate	Mode No.	Present* FEM	Crawley[7]*		Present* FEM	Crawley[7]*	
			FEM	실험치		FEM	실험치
Aluminum	1	149.28	151.9	153.0	36.43	37.61	37.6
	2	368.22	369.7	367.1	159.37	160.8	158.3
	3	919.85	937.7	922.5	231.53	234.4	234.9
	4	1222.68	1193.0	1213.0	522.20	523.3	518.8
	5	1346.37	1356.0	1336.0	665.04	662.5	658.1
[0 <sub>2</sub> /±30]s Gr./Ep.	1	261.25	261.9	234.2	64.84	65.37	58.3
	2	364.0	363.5	362.0	137.02	137.5	148.0
	3	788.40	761.8	728.3	406.63	408.3	362.7
	4	1636.30	1662.0	1449.0	527.63	525.6	508.0
	5	1766.12	1709.0	1503.0	597.37	588.3	546.0
[0/±45/90]s Gr./Ep.	1	223.37	224.3	196.4	55.20	55.58	48.6
	2	422.79	421.8	418.0	174.74	175.4	169.0
	3	1050.4	1012.0	960.0	344.50	345.3	303.0
	4	1412.9	1426.0	1215.0	593.64	591.8	554.0
	5	1721.3	1722.0	1550.0	836.44	820.1	739.0
[±45/±45]s Gr./Ep.	1	136.27	139.9	131.2	31.84	31.90	31.30
	2	500.97	499.5	472.0	191.06	191.3	185.8
	3	783.48	805.0	790.5	227.92	228.2	214.0
	4	1329.9	1326.0	1168.0	568.74	565.3	533.0
	5	1654.9	1648.0	1468.0	710.59	708.0	653.0

\*, \*\*: For Aspect Ratios, They are R=1 and R=2, respectively.

Fig. 3(a)와 (b)는 a/b가 3인 평판날개에서 뒤 제침각  $\Lambda=0^\circ$ 일때, 각각  $[0_2/0]_s$  적층판과  $[\pm\theta_2/0]_s$  적층판에 대한 진동특성을 나타내고 있다.  $[0_2/0]_s$  적층판의 첫번째 모우드는  $\theta$ 에 관계없이 굽힘 모우드로서  $\theta$ 가  $90^\circ$ 로 증가함에 따라 스펙방향의 강성 감소로 점점 감소한다. 두번째 모우드는  $\theta$ 가  $0^\circ$ 일때 비틀림 모우드로 시작하지만,  $15^\circ-30^\circ$  사이에서 굽힘 모우드와 강하게 연계되어  $30^\circ$ 를 지나면 굽힘 모우드로 변하여  $75^\circ$ 를 지나서는 다시 비틀림 모우드가 된다.  $[\pm\theta/0]_s$  적층판의 경우, 두 모우드의 고유진동수의 접근은 더욱 두드러져서,  $\theta$ 가 약  $30^\circ$ 에서 두번째와 세번째 모우드 그리고 네번째와 다섯번째 모우드의 고유진동수가 접근하게 되며, 이때 모우드 형상의 변화를 가져오게 된다.

Fig. 4와 Fig. 5는  $[0_2/0]_s$ 로 적층한 뒤제침 평판 날개 ( $\Lambda=15^\circ$ ,  $S=150$ ,  $TR=0.5$ ,  $AR=4$ )에서 각 섬유방향  $\theta$ 에 따른 진동특성의 변화와 노달 패턴을 보여주고 있다. 뒤제침각이 없는 경우보다 고유진동수는 감소하며, 모우드의 일반적인 형태는 뒤제침각이 없는 경우와 비슷하다.  $\theta$ 가 순방향으로 증가하면 앞전보다 뒷전의 변형이 커져 nose-down 비틀림이 유발되는 wash-out 현상이 나타나며,  $\theta$ 가 역방향으로 증가하면 wash-out 현상의 반대인 wash-in 현상이 나타난다. 특히  $\theta$ 가  $-10^\circ$ 에서 두번째 굽힘 모우드와 첫번째 비틀림 모우드가 접근하여 모우드가 서로 뒤바뀌는 양상을 보이며, 역시 교차 모우드에서도 이와 같은 비슷한 양상을 볼 수 있지만 서로 다른 두 모우드는 결코 한점에서 만나지는 않는다[9].

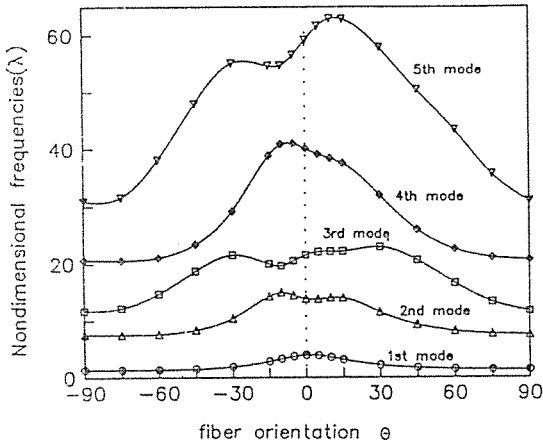


Fig. 4 Variation of frequency parameter ( $\lambda$ ) on fiber orientation of  $[\theta_2/0]_s$  graphite/epoxy swept-tapered wing ( $\Lambda=15^\circ$ ).

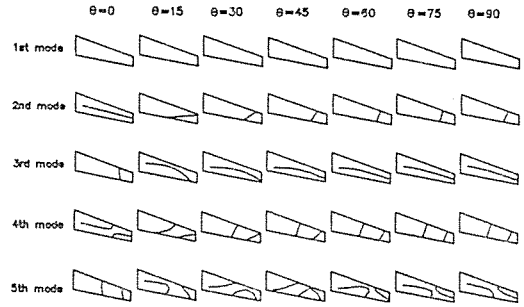


Fig. 5 Nodal patterns of  $[\theta_2/0]_s$  graphite/epoxy unswept-tapered wing ( $\Lambda=15^\circ$ ).

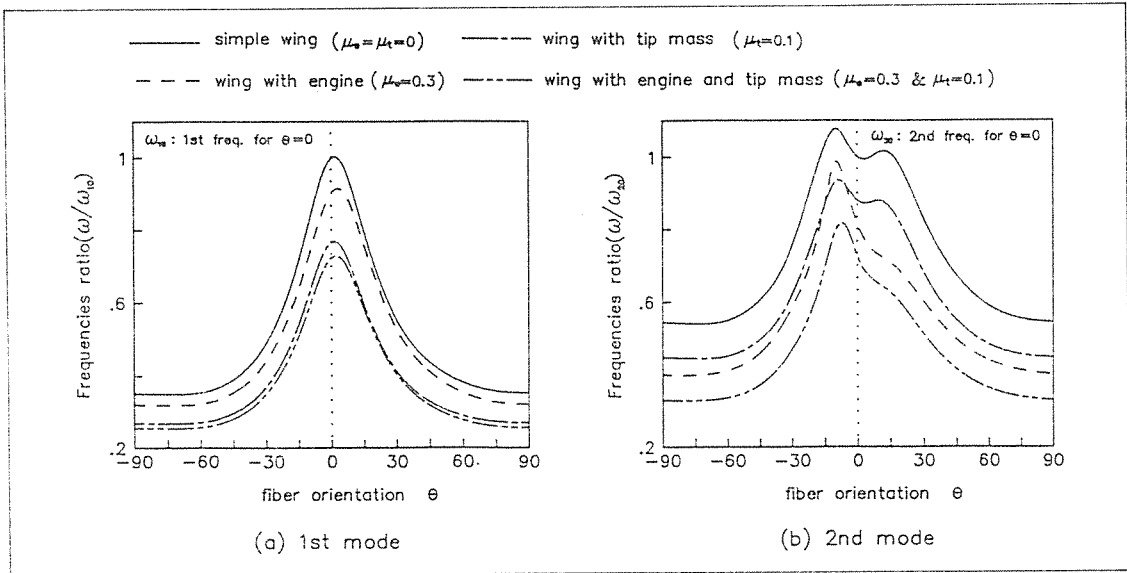


Fig. 6 Variation of the lowest four frequency ratios on mass effect of graphite/epoxy swept-tapered wing ( $\Lambda=15^\circ$ ).

Fig. 6은 익단 질량( $\mu_t=0.1$ ) 및 날개 질량의 30%에 해당하는 엔진( $\mu_e=0.3$ )이 1/4 chord와 span의 중앙에 부착된 날개에 대한 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 일반적으로 질량의 영향으로 고유진동수는 감소하지만 섬유방향  $\theta$ 와 질량의

작용점의 영향을 크게 받을 수 있다. 첫번째 모우드는 굽힘 모우드로서 날개 끝에 있는 질량이 날개 중앙에 있는 질량보다 고유진동수에 더 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 두번째 모우드는  $\theta$ 가 15°보다 큰 경우에는 두번째 굽힘 모우드로서

날개 중앙에 있는 질량이 날개 끝의 질량보다 고유진동수에 더 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

전단변형 이론에 근거한 유한요소법은 적은 자유도를 가지고도 매우 정확한 결과를 주었으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 복합 적층판은 적층순서에 관계없이 첫번째 모우드는 굽힘 모우드이며, 또한 중횡비에 관계없이 굽힘 모우드의 고유진동수는 거의 일정하다.
2. 두 모우드의 고유진동수는 플라이(ply)의 어떤 특정각에서 서로 접근하여 모우드의 변환이 이루어지나 결코 만나지는 않는다.
3.  $[0_2/0]_s$ 로 적층한 뒤계침 평판 날개의 경우 ( $\Lambda=15^\circ$ )  $\theta$ 가  $15^\circ-30^\circ$  사이에서 굽힘과 비틀림이 강하게 연계되며,  $\theta$ 가 약  $-10^\circ$ 에서 두 모우드의 접근 양상이 두드러진다.
4. 익단 질량이나 엔진이 부착된 경우 질량의 영향으로 고유진동수는 일반적으로 감소하지만, 중횡비가 작을때 시위방향(chordwise) 모우드의 고유진동수는 시위방향 강성도(chordwise rigidity)로 인하여 오히려 증가하며 고차 모우드가 된다.

#### 참고문헌

1. R.D. Mindlin, "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Iostropic, Elastic Plates," *J. Appl. Mech.*, 18, 1951, pp.31-38.
2. Y. Stavsky, "On the Theory of Symmetrically Heterogeneous Plates Having the Same Thickness Variation of the Elastic Moduli," *In Topics in Appl. Mech.* (Eds. D. Abir, F. Ollendorff and M. Reiner), American Elsevier, New York, 1965, 105.
3. P.C. Yang, C.H. Norris and Y. Stavsky, "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Pla-

tes," *Int. J. Solids and Structures*, 2, 1966, pp. 665-684.

4. J.M. Whitney and N.J. Pagano, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates," *J. Appl. Mech.*, 37, 1970, pp.1031-1036.

5. C.W. Bert and T.C. Chen, "Effect of Shear Deformation on Vibration of Antisymmetric Angleply Laminated Rectangular Plate," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 14, 1978, pp.465-473.

6. J.N. Reddy, "A Penalty Plate-bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates," *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, Vol. 15, 1980, pp.1187-1206.

7. H.V. Lakshminarayana, P. Rajagopal, M.R. Rama-Murthy and A. Jshi, "Vibration Characteristics of a Swept Composite Wing Pnale : Finite Element Analysis and Experimental Verification," *J. of Aero. Soc. of India*, Vol. 37, No. 4, 1985, pp. 189-295.

8. G.P. Guruswamy, P.M. Goorjian and Eugene L. Tu, "Transonic Aero-elasticity of Wings with Tip Stores," *J. of Aircraft*, Vol. 24, No. 10, 1987, pp.688-695.

9. I.G. Ritchie and H.E. Rosinger, "Torsion - Flexure Coupling in a Composite Materials," *J. of Physics(D) : Applied Physics*, Vol. 7, No. 9, 1974, pp.95-99.

10. R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, New York, 1975.

11. J.N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Methd*, McGraw-Hill, New York, 1984.

12. J.N. Reddy, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1984.

13. J.M. Whitney, *Structual Analysis of Laminated Plates*, Technimic Publishing, Lancaster, PA, 1987.