

## 論文

### 섬유강화 복합재료 내 탄성파 반사현상의 제3임계각

백은솔<sup>\*\*</sup>, 임현준<sup>\*</sup>

### The Third Critical Angle in Reflection of Elastic Waves in Fiber-reinforced Composites

Eunsol Baek<sup>\*\*</sup>, Hyunjune Yim<sup>\*</sup>

#### ABSTRACT

As a fundamental approach to studying elastic wave behaviors in fiber-reinforced composites, this paper introduces the analytical method to predict the modes, directions, and amplitudes of all reflected waves that are generated by free-surface reflection in fiber-reinforced composites. The paper also explores a new phenomenon where a reflected wave that is predicted to exist in accordance with the slowness surface may disappear. This may occur when the angle of incidence of a quasi-shear wave exceeds a newly defined critical angle, named the third critical angle. It is hoped that the analytical approach introduced in this paper will provide an easy-to-follow guideline for researchers in the relevant area such as ultrasonic nondestructive testing.

#### 초 록

이 논문에서는 섬유강화 복합재료에서의 초음파의 거동에 대해 파동의 모드, 방향, 자유표면에서의 반사파의 반사계수 등을 예측하는 해석적인 방법을 소개한다. 이 논문은 또한 복합재료의 자유표면에서 반사가 일어날 때의 특이한 현상을 새로이고찰하였는데, 이는 완도면(slowness surface)만을 고려하면 존재할 것으로 예상되지만 실제로는 존재하지 않는 반사파에 대한 것이다. 이는 입사파가 유사횡파일 경우, 입사각이 이 논문에서 새로 정의된 제3임계각을 넘어설 경우 나타나는 현상이다. 본 논문의 내용은 초음파검사와 같은 해당 분야에 종사하는 연구자들에게 유용한 가이드라인을 제시할 것으로 기대된다.

**Key Words :** 섬유강화 복합재료(Fiber-reinforced Composite), 횡등방 이방성(Transversely Isotropy), 탄성파(Elastic Wave), 임계각(Critical Angle), 초음파검사(Ultrasonic Nondestructive Testing)

#### 1. 서 론

복합재료의 응용이 점차 활발해 점에 따라 복합재료의 비파괴검사도 중요한 이슈로 대두되고 있다. 그러나 잘 알려진 바와 같이 복합재료는 그 이방성으로 인해 초음파검사를 성공적으로 수행하거나 그 결과를 정확하게 판독하기가 쉽지 않다. 이를 위해서는 이방성 재료 내에서 발생하는 탄성초음파의 파동 현상을 올바르게 이해하는 것이 필수적이며, 본 논문도 이러한 이해를 증진시키기 위한 하나의 연구결과이다.

본 논문에서는 먼저 단일방향의 섬유로 보강된 복합재료 내에서 초음파가 전파하다가 자유표면에서 반사될 때 발생되는 반사파의 반사각과 반사계수를 해석적으로 구하는 문현의 해석해법[1]을 요약하여 소개한다. 특징적인 내용으로는 파면의 전파 방향과 에너지 전파 방향의 상이성, 커슬(cusp)의 존재에 따른 영향 등이 있다.

또한 자유표면에서의 반사현상에 대한 에너지 반사계수를 고려함으로써, 완도면(slowness surface) 해석에서는 존재할 것으로 생각되나 실제로는 존재하지 않는 파동에 대해 고찰한다. 이러

\* 홍익대학교 기계·시스템디자인공학과

\*\* 홍익대학교 대학원 기계공학과, 교신저자(E-mail:ga3311602@wow1.hongik.ac.kr)

한 특이 현상이 발생하는 입사각을 새로운 임계각, 즉 제3임계각(third critical angle)으로 명명하고 제3임계각이 존재하게 되는 조건을 제시한다. 또한 입사각이 제3임계각을 넘어서면 존재하던 파동 중 하나가 사라지는 현상을 그 파동의 에너지 반사계수(energy amplitude ratio)가 0이 됨을 보임으로써 해석적으로 증명한다. 제3임계각의 존재를 인지하지 못하면, 실제로는 없는 파동을 있는 것으로 잘못 생각하여 초음파 검사 계획을 잘못 세우거나 검사결과 판독을 잘못할 수 있다. 본 논문은 이러한 점에서 실용적 의미를 가지며, 초음파 검사가 아닌 여타 탄성파 관련 현상의 해석에 있어서도 중요한 의미를 가질 수 있다.

## 2. 파동의 전파

### 2.1 위상속도 (phase velocity)

균질 이방성 매질에서의 탄성 변위에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijlm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 매질의 밀도,  $u_i$ 는 변위벡터의  $i$  번째 성분, 그리고  $C_{ijlm}$ 은 강성 텐서(stiffness tensor)를 나타낸다. 이 논문에서 다룰 매질은 횡등방 이방성(transversely isotropy)으로 가정할 수 있는 두 개의 섬유강화 복합재료이며 그 물성치는 Table 1에 나타내었다[2,3]. 앞으로 Table 1의 Glass-fiber/epoxy는 Composite I, E-glass/epoxy는 Composite II로 나타내겠다.

이 논문에서는 횡등방 이방성의 대칭축을  $x_3$ 축으로 가정한다. 따라서  $x_1 - x_2$  평면은 등방성 평면이며,  $x_3$ 축을 포함하는 평면은 모두 이방성 평면이다.

$x_2 - x_3$  평면에서 식 (2)와 같은 변위를 가지는 평면 조화파를 가정해보자.

$$u_i = A d_i e^{ik(x_i n_i - ct)} \quad (2)$$

Table 1 Material properties of two fiber-reinforced composites

Property	Glass-fiber/epoxy	E-glass/epoxy
$C_{1111}=C_{2222}(C_{11}=C_{22})$	10.581 GPa	11.57 GPa
$C_{1122}(C_{12})$	4.095 GPa	6.04 GPa
$C_{1133}=C_{2233}(C_{13}=C_{23})$	4.679 GPa	21.38 GPa
$C_{3333}=(C_{33})$	40.741 GPa	41.12 GPa
$C_{2323}=C_{1313}(C_{44}=C_{55})$	4.422 GPa	4.14 GPa
$C_{1212}(C_{66})$	3.243 GPa	2.765 GPa
$\rho$	1850 kg/m <sup>3</sup>	1940 kg/m <sup>3</sup>

식 (2)에서  $A$ 는 파동의 진폭,  $\mathbf{d}$ 는 단위변위벡터,  $I = \sqrt{-1}$ ,  $\mathbf{n}$ 은 파동의 노말벡터(wave normal),  $\mathbf{x}$ 는 위치벡터,  $c$ 는 파동의 위상속도, 그리고  $k$ 는 파동수이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 식 (3)과 같은 Christoffel's equation을 얻는다.

$$\left( \frac{1}{\rho} C_{ijlm} n_j n_l - c^2 \delta_{im} \right) d_m = 0 \quad (3)$$

여기서 파동이 매질 내를 전파하기 위해서는 단위변위벡터  $\mathbf{d}$ 는 0이 되면 안 되므로, 식 (3)은 고유값 문제로 생각할 수 있다. 이러한 고유값 문제를 풀기 위해 식 (3)의 특성방정식을 구하면 식 (4)와 같다.

$$\left| \frac{1}{\rho} C_{ijlm} n_j n_l - c^2 \right| = 0 \quad (4)$$

일반적인 이방성 매질에서는 파동의 노말벡터 방향이 정해지면, 그 방향으로 세 모드의 탄성파가 존재할 수 있다[4]. 즉, 식 (4)에서 노말벡터가 주어지면 그 방향으로 전파 가능한 파동 세 개의 위상속도를 얻는다. 이 위상속도는 바로 식 (3)의 고유값들이며 그에 해당하는 고유벡터로 단위변위벡터를 모두 구할 수 있다. 식 (4)를 이용하여 모든 방향의 노말벡터에 대해 위상속도를 세 개씩 구하면, 세 개의 위상속도면(phase velocity surface)을 그릴 수 있으며, Fig. 1은 Composite I과 Composite II의 위상속도면을 그린 후,  $x_2 - x_3$  평면으로 자른 단면을 보여준다.

Fig. 1에서 qP는 유사종파(quasi longitudinal wave), qSV는 유사수직횡파(quasi shear vertical wave), 그리고 SH는 수평횡파(shear horizontal wave)를 뜻한다. 여기서 “유사(quasi)”는 노말벡터 방향과 변위방향이 서로 수직도 아니고 평행하지도 않다는 것을 암시한다. 유사종파와 유사수직횡파는 이방성 평면인  $x_2 - x_3$  평면 내에 있으므로 “유사”를 붙이고, 등방성 평면인  $x_1 - x_2$  평면 내에 있는 수평횡파는 변위방향과 노말벡터 방향이 정확히 수직이므로 “유사”를 붙이지 않았다. 이는 대상 매질이 횡등방 이방성이기 때문이며, 일반적인 이방성 매질에서는 모든 탄성파가 “유사” 모드로 나타난다.

### 2.2 완도면 (slowness surface)

완도벡터(slowness vector)는 위상속도벡터와 방향은 같고 크기는 역수인 물리량으로 식 (5)와 같이 정의한다.

$$m_j = \frac{n_j}{c} \quad (5)$$

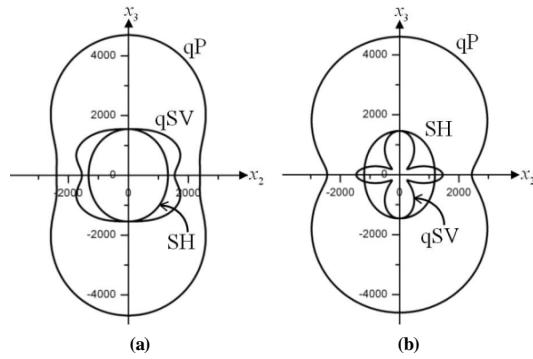


Fig. 1 Cross-sections of phase velocity surfaces in  $x_2 - x_3$  plane: (a) Composite I; (b) Composite II.

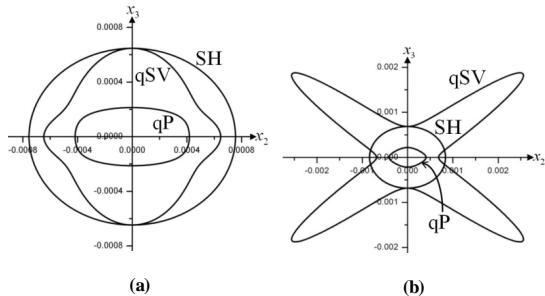


Fig. 2 Cross-sections of slowness surfaces in  $x_2 - x_3$  plane: (a) Composite I; (b) Composite II.

식 (4)를 이용하여 모든 방향의 노말벡터에 대해 위상속도를 구하고, 식 (5)로부터 이에 해당하는 완도벡터를 구해 그 끝점을 연결하면 만들어지는 곡면을 완도면(slowness surface)이라 한다. Fig. 2는 Composite I과 Composite II의 완도면을 그린 후,  $x_2 - x_3$  평면으로 자른 단면을 보여준다. Fig. 2와 같은 완도면 위의 한 점에서 접선을 그으면, 그 접선에 수직인 방향이 파동의 에너지 전파 방향이다. 완도면의 이러한 특성은 파동의 반사 및 굴절 현상을 해석하는 데 매우 유용하다. 이 두 매질의 완도면을 살펴보면,  $x_3$ 축과 평행한 임의의 직선을 그었을 때, Composite I의 완도면은 어느 것이든 최대 두 개의 교점을 가질 수 있는 한편, Composite II는 qSV 모드의 경우 최대 네 개의 교점을 가질 수 있다.

앞으로 Fig. 2(a)와 같은 완도면을  $x_3$ 축에 대해 “볼록(convex)”하다고 하고, Fig. 2(b)에서 qSV 모드의 완도면과 같은 형상은  $x_3$ 축에 대해 “오목(concave)”하다고 부르겠다. 이와 같이 매질의 특성에 따라 나타나는 완도면의 형상 차이가 이후에 반사현상해석에 있어 큰 차이를 일으키게 된다.

### 2.3 군속도 (group velocity)

일반적으로 이방성 매질에서는 위상속도벡터와 군속도

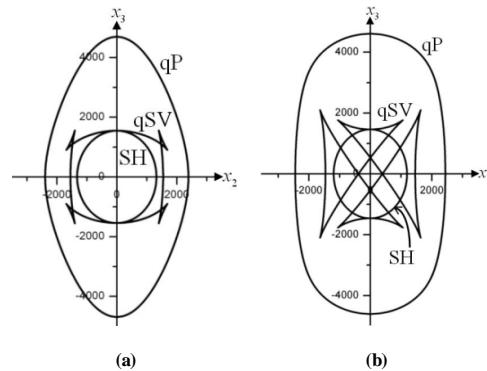


Fig. 3 Cross section of wave surfaces in  $x_2 - x_3$  plane: (a) Composite I; (b) Composite II.

벡터(group velocity vector)의 크기와 방향이 서로 다르다. 노말벡터 방향과 에너지 전파 방향의 차이를 범스큐각(beam skew angle)이라 하며, 노말벡터 방향이 정해지면 범스큐각  $\Delta$ 와 군속도벡터  $\mathbf{s}$  사이에는 식 (6)과 같은 관계가 성립한다[4].

$$|\mathbf{s}| = \frac{c}{\cos \Delta} \quad (6)$$

즉, 주어진 노말벡터에 대해 위상속도와 범스큐각  $\Delta$ 를 알면 에너지 방향벡터의 크기를 알 수 있으며, 군속도는 위상속도 보다 항상 크거나 같다.

모든 방향의 노말벡터에 대해 범스큐각을 구하고[5], 식 (6)을 써서 군속도벡터의 크기를 계산하면, 세 모드에 대한 파면(wave surface)이 그려진다. 이것을  $x_2 - x_3$  평면으로 잘라 단면을 구한 결과가 Fig. 3이다. Fig. 3에서 보이는 파면들은 원점에서 시작된 파동이 단위 시간(1 sec) 동안 퍼져나간 파동선단(wavefront)이라고 생각할 수 있다. 여기서 qSV 모드의 경우 커슬(cusp)이 생기는 것을 볼 수 있는데, 커슬이 존재하는 방향에서 최대 세 방향의 파면을 관찰할 수 있다. 이는 qSV 모드의 경우 에너지 방향 한 개에 대해 가능한 노말벡터 방향이 여러 개가 될 수 있다는 것을 의미한다.

## 3. 반사 및 굴절

### 3.1 반사각 및 굴절각

이 절에서는 이방성 매질 내에서 전파한 파동이 자유 표면이나 타 매질과의 경계면에서 반사되거나 굴절하는 경우에 대해 반사각, 굴절각, 반사계수, 굴절계수를 해석적으로 구하는 방법을 살펴본다.

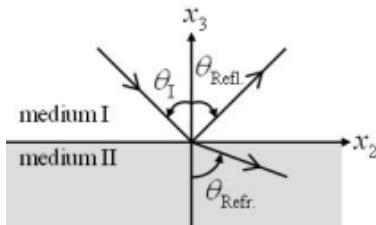


Fig. 4 Schematic diagram of two transversely isotropic media.

Table 2 Superscript  $\alpha$ 

$\alpha$	Incident qP	Incident qSV
1	RSH	RSH
2	RqSV	RqSV or RqSV1
3	RqP	RqP or RqSV2
4	Refracted SH	
5	Refracted qSV	
6	Refracted qP	

이 절에서 다루는 입사, 반사 및 굴절각은 입사, 반사 및 굴절파의 에너지 전파 방향이 아니라 노말벡터 방향이 경계면에 대한 수직선과 이루는 각을 말한다. 이 논문에서 다루는 것은 횡동방 이방성 평면인  $x_2 - x_3$  평면에서의 파동현상이므로 면 외 변위인 SH는 제외하고 면내 변위인 qP, qSV 파에 대해서만 기술하겠다. 이방성 매질에서 반사각은 등방성과 마찬가지로 스넬의 법칙(Snell's law)으로 구할 수 있는데, 그 적용은 다소 복잡하다. 완도면에 스넬의 법칙을 적용하여 도식적으로 반사각을 구하는 방법은 Henneke[6]에 의해 제시된 바 있다.

Rokhlin은 반사파와 굴절파에 대한 반사계수와 반사계수를 수학적으로 구하는 방법을 제시하였는데[1], 그 과정을 간단히 설명하면 다음과 같다.

Fig. 4와 같이 입사각이  $\theta_I$ 인 입사파가 medium I에서 medium II로 향하고, 반사파와 굴절파가 각각  $\theta_{\text{Refl}}$ 과  $\theta_{\text{Refr}}$ 의 각도로 전파하는 경우를 생각해 보자. 이러한 입사파, 반사파, 굴절파를 구분하기 위해 위첨자를 사용하는데,  $\alpha = 0$ 인 물리량은 입사파에 해당하는 값이며,  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ 인 물리량은 여러 모드의 반사파나 굴절파에 해당하는 값이다. Table 2는 입사파가 qP인 경우와 qSV인 경우로 나누어  $\alpha$  값이 1, 2, ..., 6 일 때 지칭하는 반사 및 굴절파를 나타내고 있다.

Table 2에서 RqSV1과 RqSV2는 입사파가 유사수직횡파이고 제2임계각과 제3임계각이 존재하는 경우에 사용하며, 반사유사수직횡파의 완도벡터의  $x_3$  축 성분이 0보다 크면 RqSV1, 작으면 RqSV2로 구분한 것으로서, 뒤에서 더 명료해질 것이다.

식 (4)를  $c^2$ 으로 나누면

$$\left| \frac{1}{\rho} C_{ijlm} m_j m_l - \delta_{im} \right| = 0 \quad (7)$$

이 된다. 모든 qP와 qSV는  $x_2 - x_3$  평면 내 변위를 가지므로 해당하는  $m_1$ 은 0이 되고,  $m_2$ 는 반사파나 굴절파 모두 입사파의 값과 같으므로 아는 값이다. 식 (8), (9)는 이를 수식으로 나타낸 것이다.

$$m_1^1 = m_1^4 = 1, \quad m_1^2 = m_1^3 = m_1^5 = m_1^6 = 0 \quad (8)$$

$$m_2^0 = m_2^1 = m_2^2 = \dots = m_2^6 \quad (9)$$

식 (8), (9)를 식 (7)에 대입하면  $m_3$ 만 미지수가 되며, 식 (7)로부터 여섯 개의 해를 찾으면 완도벡터 여섯 개의 모든 성분을 알게 된다. 그리고 식 (7)은 수학적으로 식 (4)와 동일하므로, 식 (3)을 이용하여 이미 구한 여섯 개의 완도벡터에 해당하는 단위변위벡터를 계산한다. 그리고 이 변위벡터와 식 (10)을 이용하여 군속도벡터를 계산하면, 여섯 개의 변위벡터 중 어느 것이 물리적으로 타당한 것인지 알 수 있다. 즉, 각각의 변위벡터로 계산한 에너지 방향이 medium I으로 향하면 그 변위벡터는 반사파의 변위벡터이고, medium II로 향하면 굴절파의 변위벡터이다[1].

$$s_l = \frac{1}{\rho} C_{ijlm} m_j d_i d_m \quad (10)$$

이제 모든 반사파와 굴절파에 대한 단위변위벡터와 군속도벡터를 계산할 수 있으며, 반사각과 굴절각은 완도벡터로부터 식 (11)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\theta_{\text{Refl.}} \text{ or } \theta_{\text{Refr.}} = \tan^{-1}(m_2 / m_3) \quad (11)$$

### 3.2 반사계수 및 굴절계수

반사계수 및 굴절계수(amplitude reflection/refraction coefficients)는 두 매질 사이의 경계조건으로부터 구한다. 경계에서 변위와 트랙션(traction)의 연속조건은 식 (12)로 나타낼 수 있다.

$$u_I^0 + \sum_{p=1}^3 u_I^p = \sum_{p=1}^3 u_{II}^p \quad (12)$$

$$(\sigma_{ik}^0 v_k)_I + \sum_{p=1}^3 (\sigma_{ik}^p v_k)_I = \sum_{p=1}^3 (\sigma_{ik}^p v_k)_{II}$$

여기서  $v_k$ 는 경계에 수직인 단위벡터를 뜻한다. 식 (12)를 정리하면 식 (13)과 같이 된다[1].

$$\begin{aligned} A^0 d_i^0 + \sum_{\alpha=1}^6 A^\alpha d_i^\alpha &= 0 \\ A^0 C_{j3ki} m_k^0 d_i^0 + \sum_{\alpha=1}^6 A^\alpha C_{j3ki} m_k^\alpha d_i^\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)은 식 (14)와 같이 행렬식으로 쓸 수 있는데, 여기서  $BC$ 는 크기가  $6 \times 6$ 인 행렬이고  $L$ 은 크기가  $6 \times 1$ 인 벡터이다.

$$[BC] \begin{pmatrix} A^\alpha \\ A^0 \end{pmatrix} = \{L\} \quad (14)$$

식 (14)에 해당하는 물성치와 앞에서 계산한 완도벡터, 단위변위벡터 등을 대입하고, Cramer's rule을 써서  $A^\alpha / A^0$ , 즉 반사 및 굴절계수를 계산한다. 또한 에너지 반사계수(energy reflection coefficient)는 식 (15)로 계산된다[1].

$$r^\alpha = \left( \frac{A^\alpha}{A^0} \right)^2 \frac{\rho^\alpha}{\rho^0} \frac{s_3^\alpha}{s_3^0} \quad (15)$$

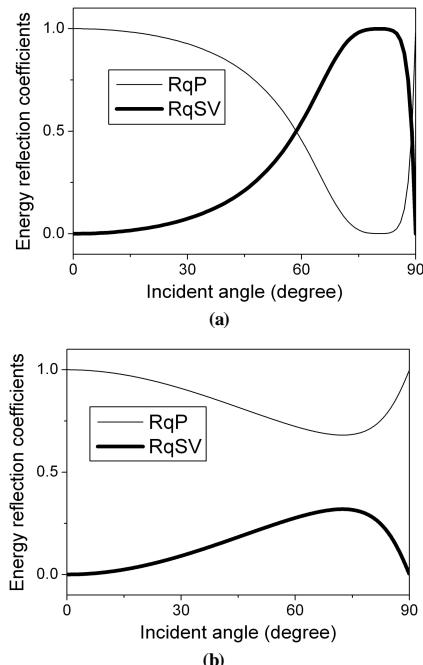


Fig. 5 Energy reflection coefficients for incident qP at free boundary: (a) Composite I; (b) Composite II.

위와 같은 과정을 따라 medium I은 Composite I 또는 Composite II이고 medium II는 진공일 때 에너지 반사계수를  $0^\circ \sim 90^\circ$ 의 입사각에 대해 각각 구하였다. Fig. 5는 입사파가 유사종파일 때이고, Fig. 6은 입사파가 유사수직횡파일 때를 나타낸다. Fig. 5에서는 모든 입사각에 대해 모드 변환이 일어나며, 반사유사종파와 반사유사수직횡파가 에너지를 나누어 가지는 것을 알 수 있다.

그에 반해, 입사파가 유사수직횡파인 Fig. 6을 보면, 반사유사종파가 사라지는 제1임계각(first critical angle) [6]은 Composite I의 경우 약  $52.0^\circ$ (Fig. 6a), Composite II의 경우 약  $26.6^\circ$ (Fig. 6b)인 것을 알 수 있다. 그리고 입사각이 증가하면 Composite II에서는 Composite I에서는 볼 수 없는 현상이 나타난다. 입사각이 약  $35.1^\circ$ 에 이르면 반사유사수직횡파가 두 개 나오기 시작하며, 이 각도를 제2임계각(second critical angle)이라 한다[6]. 입사각이 더 증가하여  $54.7^\circ$  이상이 되면 흥미로운 현상이 일어난다. 존재하던 반사유사수직횡파 두 개 중 하나의 에너지 반사계수가 0이 되어 이 파동은 사라지는 데, 이 각도를 제3임계각(third critical angle)이라 부르겠다. 이러한 현상은 기존의 문헌에서 보고된 바 없으며, 이어지는 두 절에서 제3임계각의 존재에 대한 증명과 그 물리적 의미를 기술하겠다.

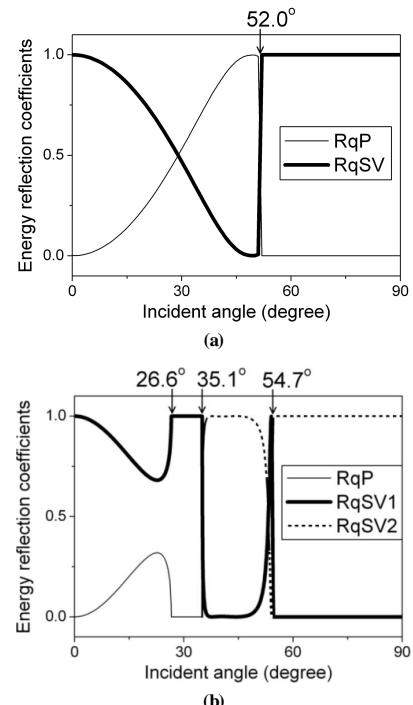


Fig. 6 Energy reflection coefficients for incident qSV at free boundary: (a) Composite I; (b) Composite II.

### 3.3 제3임계각의 존재

앞 절에서는 Composite II라는 특정한 하나의 재료에서 제3임계각이 발생되는 현상을 살펴보았으며, 이 절에서는 Composite II와 같이  $x_3$ 축에 대해 오목한 완도면을 가지는 재료에서 제3임계각이 발생되는 과정을 수학적으로 고찰하고자 한다.

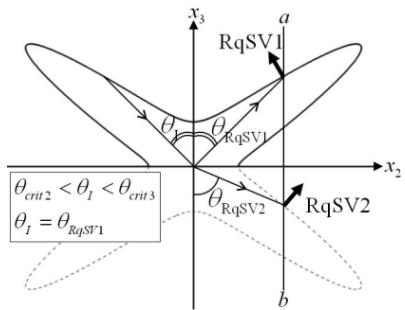


Fig. 7 Angles of reflection for incident angle between  $\theta_{\text{crit}2}$  and  $\theta_{\text{crit}3}$ .

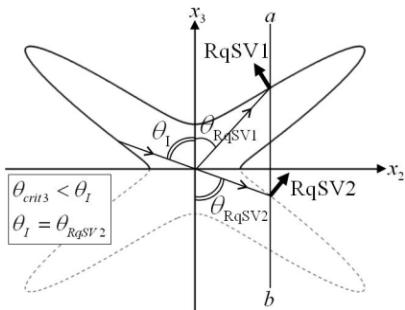


Fig. 8 Angles of reflection for incident angle above  $\theta_{\text{crit}3}$ .

Figs. 7, 8은 이러한 재료에서 제3임계각을 전후하여 달라지는 관계식을 유도하기 위해 완도면을 해석한 그림이며, 굵게 표시한 화살표는 각 반사파의 에너지 방향을 나타낸다. 또한, 제2임계각, 제3임계각은 각각  $\theta_{\text{crit}2}$ ,  $\theta_{\text{crit}3}$ 으로 나타내었다.

Fig. 7은 입사각이 제2임계각과 제3임계각 사이일 경우의 반사현상을 도식적으로 나타낸 것이다. 이 경우 반사파의  $x_3$ 축 성분  $m_3$ 가 0보다 큰 RqSV1의 반사각은 입사각과 같고,  $m_3$ 가 0보다 작은 RqSV2의 반사각은 입사각보다 큰 것을 알 수 있다. 이는 입사파의 완도벡터의  $x_3$ 축 성분과 RqSV1의  $x_3$ 축 성분이 크기는 같고 부호는 반대가 된다는 뜻이며, 식 (16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_3^2 = -m_3^0 \quad (16)$$

Fig. 7에서 입사각이 증가함에 따라 수직선  $ab$ 는 오른쪽으로 이동하여 완도면의 가장 오른쪽 끝 부분에 접하게 된다. 이

끝 부분에 접한 후 입사각이 더 증가하면 수직선  $ab$ 는 이제 원쪽으로 이동하는데, Fig. 8은 그러한 경우의 반사현상을 도식적으로 나타낸 것이다. 이 경우 반사파의  $x_3$ 축 성분  $m_3$ 가 0보다 큰 RqSV1의 반사각은 입사각 보다 작고,  $m_3$ 가 0보다 작은 RqSV2의 반사각은 입사각과 같은 것을 알 수 있다. 이는 입사파의 완도벡터의  $x_3$ 축 성분과 RqSV2의 완도벡터의  $x_3$ 축 성분이 같아진다는 뜻이며, 식 (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_3^3 = m_3^0 \quad (17)$$

식 (17)과 같은 관계가 성립하는 것은 입사각이 증가함에 따라 수직선  $ab$ 가 완도면의 오른쪽 끝 부분에 접한 이후부터이다. 이 때의 입사각이 제3임계각이며, 수학적으로는 입사각이 제2임계각과 제3임계각 사이일 때는 식 (7)이  $x_2 - x_3$  평면에서 유사수직횡파에 해당하는 네 개의 서로 다른 실근을 가지며, 제3임계각에서는 두 개의 중근, 제3임계각 이상에서는 다시 서로 다른 네 개의 실근을 가진다.

식 (16), (17)과 같이 제3임계각을 전후하여 달라지는 현상을 고려하지 않으면, 완도면 해석만으로는 제2임계각 이후에는 입사파가  $90^\circ$ 에 이를 때까지 반사 qSV 파가 두 개가 있다고 생각할 수 있다. 그러나 식 (17)을 적용하면, 제3임계각 이후 RqSV1이 사라지는 현상을 고찰할 수 있다.

이제 제3임계각 이상에서 식 (17)을 적용하여 RqSV1이 사라지는 현상을 고찰하고자 한다. 자유표면에서의 반사현상을 다루는 것이므로  $\alpha$ 가 1, 2, 3 일 때, 즉 반사계수에 대해서만 (Table 2 참조) 식 (14)를 풀면 식 (18)-(20)을 유도할 수 있다.

$$\frac{A^1}{A^0} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1 d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\quad \left\{ \left( C_{2233}m_2^3 d_2^3 + C_{3333}m_3^3 d_3^3 \right) \left( m_2^0 d_3^0 + m_3^0 d_2^0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( C_{2233}m_2^0 d_2^0 + C_{3333}m_3^0 d_3^0 \right) \left( m_3^3 d_2^3 + m_2^3 d_3^3 \right) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{A^3}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1 d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\quad \left\{ \left( m_3^2 d_2^2 + m_2^2 d_3^2 \right) \left( C_{2233}m_2^0 d_2^0 + C_{3333}m_3^0 d_3^0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( C_{2233}m_2^2 d_2^2 + C_{3333}m_3^2 d_3^2 \right) \left( m_2^0 d_3^0 + m_3^0 d_2^0 \right) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

입사각이 제3임계각을 넘어서면 Fig. 8에서와 같이 입사각과 RqSV2의 반사각이 같으므로 식 (17)이 성립한다. 그러면 RqSV2의 단위변위벡터는 입사파의 단위변위벡터와 같은 값이

된다. 즉, 이는  $(d_1^0, d_2^0, d_3^0)$ 는  $m_3^0$ 로 식 (3)을 이용하여 구한 단위변위벡터이고,  $(d_1^3, d_2^3, d_3^3)$ 는  $m_3^3$ 로 구한 단위변위벡터인데,  $m_3^0$ 와  $m_3^3$ 이 같기 때문에 당연히 두 단위변위벡터도 같아진다는 뜻이다. 식 (21)은 이러한 관계를 나타낸다.

$$d_1^3 = d_1^0, \quad d_2^3 = d_2^0, \quad d_3^3 = d_3^0 \quad (21)$$

먼저 식 (8), (9)를 식(18)-(20)에 대입하여 정리해보자. 먼저 항상 0이 되는 식 (18)은 제외하고 식 (19), (20)는 식 (22), (23)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\left\{ C_{2233} \left[ m_2^3 d_2^3 m_2^0 d_3^0 + m_2^3 d_2^3 m_3^0 d_2^0 - m_2^0 d_2^0 m_3^3 d_2^3 - m_2^0 d_2^0 m_3^3 d_3^0 \right] \right. \\ &\left. + C_{3333} \left[ m_3^3 d_3^3 m_2^0 d_3^0 + m_3^3 d_3^3 m_3^0 d_2^0 - m_3^0 d_3^0 m_3^3 d_2^3 - m_3^0 d_3^0 m_3^3 d_3^0 \right] \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A^3}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\left\{ C_{2233} \left[ m_2^2 d_2^2 m_2^0 d_2^0 + m_2^2 d_2^2 m_3^0 d_2^0 - m_2^2 d_2^2 m_2^0 d_3^0 - m_2^2 d_2^2 m_3^0 d_2^0 \right] \right. \\ &\left. + C_{3333} \left[ m_3^2 d_3^2 m_2^0 d_3^0 + m_3^2 d_3^2 m_3^0 d_2^0 - m_3^2 d_3^2 m_2^0 d_3^0 - m_3^2 d_3^2 m_3^0 d_2^0 \right] \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

식 (22), (23)의 각 항에서  $m_2^a$ 는 식 (9)에 의해 모두  $m_2^0$ 로 바꿔 쓸 수 있으므로,

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\left\{ C_{2233} m_2^0 \left[ m_2^0 (d_2^3 d_3^0 - d_2^0 d_3^3) + d_2^3 d_2^0 (m_3^0 - m_3^3) \right] \right. \\ &\left. + C_{3333} m_3^0 \left[ m_2^0 d_3^0 d_3^3 (m_3^0 - m_3^3) + m_3^3 m_3^0 (d_3^3 d_2^0 - d_3^0 d_2^3) \right] \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A^3}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\left\{ C_{2233} m_2^0 \left[ m_2^0 (d_2^2 d_2^0 - d_2^2 d_2^0) + d_2^2 d_2^0 (m_3^2 - m_3^0) \right] \right. \\ &\left. + C_{3333} m_3^0 \left[ m_2^0 d_3^0 d_3^2 (m_3^0 - m_3^2) + m_3^2 m_3^0 (d_3^2 d_2^0 - d_3^0 d_2^2) \right] \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

이 된다. 식 (24), (25)에 식 (17), (21)를 대입하면, 식 (24), 즉 RqSV1의 반사계수는

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{A^0} &= \frac{C_{2323}C_{3131}m_3^1d_1^1}{\det[BC]} \times \\ &\left\{ C_{2233} m_2^0 \left[ m_2^0 (d_2^3 d_3^0 - d_2^0 d_3^3) + d_2^3 d_2^0 (m_3^0 - m_3^3) \right] \right. \\ &\left. + C_{3333} \left[ m_2^0 d_3^0 d_3^3 (m_3^0 - m_3^3) + m_3^3 m_3^0 (d_3^3 d_2^0 - d_3^0 d_2^3) \right] \right\} \\ &= 0 \quad (26) \end{aligned}$$

이 되지만 식 (25), 즉 RqSV2의 반사계수는 0이 아닌 값을 가지게 된다. 식 (26)을 살펴보면 네 항의 소괄호 안의 값이 모두 항상 0이 되는 것, 즉,  $A^2/A^0$ 는 제3임계각 이후부터는 항상 0이 되는 것을 확인할 수 있다. 또한, 이를 식 (15)에 대입하여 에너지 반사계수를 계산하면 당연히 0이 된다는 것을 알 수 있다. 즉, 입사각이 제3임계각 이상일 경우, 완도면과 에너지 방향을 고려하면 반사유사횡파가 두 개 있어야 하나, 에너지 반사계수를 고려하면 한 개의 반사유사횡파가 사라지는 특수한 현상이 발생한다는 것을 확인한 것이다.

### 3.4 제3임계각의 물리적 의미

그동안의 여러 문헌[1,4,5,6]들에서는 특정한 종류의 이방성 재료의 경우 제2임계각이 존재한다는 것을 지적해왔다. 그러나 본 논문에서 제시하는 것처럼 제2임계각이 존재하는 경우 반드시 제3임계각이 존재한다는 것은 완도면 해석과 반사계수를 같이 고려하지 않으면 알 수 없는 사실이다. 또한, 유사수직횡파가 자유표면에 입사할 경우 입사각 보다 작은 반사각의 반사파는 발생하지 않는다는 것도 알 수 있다.

이는 2.2절에서 정의한 의미의 “오목”한 모양의 완도면을 가지는 매질에서만 나타날 수 있는 현상이다. 완도면의 형상은 매질의 물성치에 따라 결정되며 횡등방 이방성 매질인 경우 오목한 완도면을 가질 조건은 식 (27)과 같이 주어진다[7].

$$-1 \leq \frac{C_{1212} - C_{3131}}{4C_{3131} + 2C_{1133} - C_{1111} - C_{3333}} \leq 0 \quad (27)$$

식 (27)은 식 (7)의  $x_2 - x_3$  평면에서 유사수직횡파에 해당하는 네 개의  $m_3$ , 즉, 네 개의 근(2.2절에서 언급한 네 개의 교점)을 가질 조건을 나타내며, 이것은 qSV 모드의 완도면이 오목한 경우에만 가능하다[7]. 이 논문에서 다른 두 매질 중 Composite I은 식 (27)을 만족하지 않고 Composite II는 만족한다. 따라서 Composite I에서는 약 52.0°인 제1임계각만 존재하며, Composite II에서는 약 26.6°인 제1임계각 외에도 약 35.1°와 54.7°인 제2임계각과 제3임계각이 존재한다.

Table 3은 재료의 물성치가 식 (27)을 만족하는 경우 자유표면에 입사하는 유사수직횡파의 입사각이 0°에서 90°로 증가함에 따라 구간마다 발생되는 반사파를 나타낸 것이다. Table 3에서 보는 것처럼 구간마다 발생하는 반사파는 조금씩 달라진다.

Table 3 Types of reflected waves at free boundary for qSV incident waves in transversely isotropic media with “concave” qSV slowness surface

Incident angle	Reflected waves
$0^\circ \sim \theta_{\text{crit1}}$	RqP, RqSV1
$\theta_{\text{crit1}} \sim \theta_{\text{crit2}}$	RqSV1
$\theta_{\text{crit2}} \sim \theta_{\text{crit3}}$	RqSV1, RqSV2
$\theta_{\text{crit3}} \sim 90^\circ$	RqSV2

만약 Table 3과 같은 반사파의 변화를 모른다면, 유사수직횡파가 제2임계각 이상의 입사각으로 입사할 경우 항상 반사유사수직횡파가 두 개가 있는 것으로 예상할 것이다. 이러한 가정하에서 초음파 비파괴시험을 수행하면, 기대하던 반사파 중 하나는 사라지므로 원하는 결과를 얻지 못할 수 있다.

또한, 이방성 재료에서의 파동 현상은 해석하기가 매우 복잡하다는 점을 감안하면 제3임계각의 존재를 인식하는 것은 유용한 정보로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 결 론

이 논문에서는 우선 횡동방 이방성 매질로 가정한 두 개의 섬유강화 복합재료를 대상으로 하여, 여러 문헌에 발표된 이방성 매질 내 탄성파 파동 현상에 대한 해석해법을 이용하여 자유경계면에서의 반사각과 반사계수를 구하는 과정을 요약, 정리하였다.

이를 이용하여, 매질에 따라서는 유사수직횡파가 자유표면에 입사할 때 반사유사수직횡파가 두 개 나타나기 시작하는 제2임계각이 존재할 수 있고, 그럴 경우 제3임계각도 반드시 존재함을 발견하였다. 또한, 입사각이 제3임계각을 초과하면 반사유사수직횡파 두 개 중 하나는 사라진다는 것을 에너지 반사계수 해석 및 도식을 통해 증명하였다.

특히 이러한 제3임계각에 관한 논의는 기존의 문헌에서 볼 수 없는 새로운 내용으로 생각되며, 이를 인지하는 것은 초음파 검사를 비롯한 탄성파 해석에 있어서 중요한 의미를 가질 수 있다.

또한, 본 논문에서 설명한 해석적인 방법은 횡동방 이방성 매질에서의 탄성파 전파 및 초음파 비파괴 검사를 연구하는 연구자에게 도움이 될 수 있을 것이며, 본 논문에서 해석적으로 그 존재를 증명한 제3임계각은 향후 연구에서 실험적인 검증이 이루어져야 할 것이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 특정기초연구(No. R01-2005-000-10395-0)의 연구비 지원으로 수행되었으며, 연구비 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- 1) S. I. Rokhlin, T. K. Bolland, and Laszlo Adler, “Reflection and refraction of elastic waves on a plane interface between two generally anisotropic media”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 79, No. 4, 1986, pp. 906-918.
- 2) M. S. Gaith and C. Y. Akgoz, “A new representation for the properties of anisotropic elastic fiber reinforced composite materials”, *Reviews on Advanced Materials Science*, Vol. 10, No. 2, 2005, pp. 138-142.
- 3) E. R. C. Marques and J. H. Williams, Jr., “Stress waves in transversely isotropic media”, *NASA Contract Report 3977*, 1986.
- 4) F. I. Fedorov, *Theory of elastic waves in crystals*, Plenum Press, New York, 1968.
- 5) M. J. P. Musgrave, “Deviation of ray from wave normal for elastic waves in principal planes of crystal symmetry”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 18, No. 3, 1970, pp. 207-211.
- 6) E. G. Henneke, “Reflection-Refraction of a Stress Wave at a Plane Boundary between Anisotropic Media”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 51, No. 1(part2), 1972, pp. 210-217.
- 7) D. A. Prikazchikov and G. A. Rogerson, “Some comments on the dynamic properties of anisotropic and strongly anisotropic pre-stressed elastic solids”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 2, 2003, pp. 149-171.
- 8) R. W. Ogden and D. A. Sotiropoulos, “Refelction of plane waves from the boundary of a pre-stressed compressible elastic half-space”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol. 61, No. 1, 1998, pp. 61-90.