

論文

전단변형이론에 따른 복합재 적층구조물의 층간분리좌굴과 성장해석

경우민* · 김천곤**

Analysis of Delamination Buckling and Growth of Composite Laminated Structures Based on Shear Deformation Theory

W.M. Kyoung* and C.G. Kim**

ABSTRACT

An analytical method is presented to determine the delamination buckling and growth of an axially loaded laminated beam-plate with through-the width delamination at an arbitrary location in loading direction. The influence of the delamination size, depth, and location on initial buckling and strain energy release rate is investigated with consideration of the transverse shear deformation. The buckling load is significantly affected by the location of the unsymmetric delamination in axial direction for the relatively thick delamination. The effects of the transverse shear deformation on the growth of delamination are investigated. The energy release rate with the transverse shear deformation is higher than that without transverse shear deformation.

초 록

임의의 위치와 깊이에 폭방향으로 관통된 층간분리가 있는 적층 보-평판이 압축하중을 받을 때, 전단변형이론을 기초해서 좌굴하중과 층간분리성장에 대해 해석했다. 해석결과를 통해 층간분리 좌굴하중은 층간분리의 위치, 길이, 깊이에 따라 달라짐을 알 수 있었다. 층간분리가 존재하면 좌굴하중은 대개 감소하고, 상대적으로 두꺼운 층간분리가 있을 때 축방향으로 비대칭으로 위치하면 대칭일 때 보다 좌굴하중이 감소하는 영향을 나타냈다. 층간분리성장에 대한 횡전단변형효과를 고려해보면, 에너지 방출률값은 횡전단변형을 무시할 때 보다 크게 나온다.

기 호

L : 보-평판의 길이
 H : 보-평판의 두께

\bar{h} : 층간분리층의 두께비 ($=h/L$)
 \bar{a} : 층간분리층의 길이비 ($=a/L$)

* 한국과학기술원 항공우주공학과 대학원

** 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

\bar{c}	: 층간분리층의 위치를 나타내는 무차원화 계수 ($=x_{center}/L$)
\bar{l}_1	: 고정단에서 층간분리선단까지의 무차원화 길이 ($=l_1/L$)
a	: 층간분리층의 상대적 세장비 ($=\bar{a}/h$)
w_i, u_i, ψ_i	: i 번째 부분층의 deflection, in-plane displacement, rotation
U_i	: i 번째 부분층의 변형에너지
V_i	: i 번째 부분층의 외력에 의한 일
Π	: 전체 포텐셜 에너지
k	: 전단보정계수
λ_i	: i 번째 부분층의 하중변수
s	: 전단변형계수
\bar{P}_i	: i 번째 부분층의 무차원화 하중 ($=\frac{P_i^0}{4\pi^2/L^2}$)
P^*, V^*, M^*	: 층간분리선단에서 inplane load, 전단력, 모멘트를 나타내는 변수
Γ	: 층간분리선단에서 에너지 방출률
$\bar{\Gamma}$: 무차원화 에너지 방출률 ($=\frac{\Gamma}{D_1 H^2/L^4}$)
하첨자	
i	: 층간분리를 기준으로 구분한 보-평판의 부분층($i=1, 2, 3, 4$)

1. 서 론

층간분리(delamination)는 복합재 적층구조물에서 흔히 발생하는 파손형태이다. 이러한 층간분리는 대개 제조과정에서 생긴 결함이나 사용중에 발생하는 여러 이유로 일어난다. 층간분리가 생기면 구조물의 강성이 저하되고 임계좌굴하중이 낮아져서 구조물 전체가 가지는 하중지지능력(ultimate axial load capacity)이 떨어지게 된다. 따라서 구조물의 안정성을 크게 해치게 되므로 이에 대해 많은 연구가 이루어지고 있다.

층간분리를 고려해서 구조물이 견딜 수 있는 극하중(ultimate load)을 예측하려면 임계좌굴하중과 좌굴후 거동을 함께 해석해야 한다. 복합재 적층구조물이 압축하중을 받으면 층간분리된 층에서 좌굴이 일어나게 되는데, 이때 층간분리의 기하조건에 따라 좌굴양상이 달라진다. 층간분리가 매우 작은 경우는 층간분리가 없는 경우처럼 좌굴하중이 하중지지능력이 되지만, 대부분은 좌굴후에도 계속 하중을 지

지하게 된다. 그러므로, 좌굴이 일어난 이후에 층간분리성장을 결정하는 좌굴후 거동을 해석해야 전체 하중지지능력을 예측할 수 있다. 층간분리성장을 결정하는 방법은 층간분리선단(delamination front)에서 층간응력(interlaminar stress)을 계산해서 재료의 전단강도를 기준으로 평가하는 방법과 층간분리선단에서 변형에너지 방출률(strain energy release rate)을 계산해서 이 값이 파괴인성치(fracture toughness)보다 클때 성장이 일어난다고 평가하는 파괴역학을 기초한 방법이 있다.

층간분리좌굴과 성장 문제에 대해 처음으로 Chai [1]등이 일차원 층간분리(폭방향으로 관통해 있고, 두께, 길이가 일정)를 오일러 기둥이론과 그리피스(Griffith's fracture criterion)를 이용해서 해석했다. 균질성, 등방성 일차원 보에 대해 얇은 필름(thin film) 모델과 일반적 층간분리모델로 좌굴하중과 층간분리성장, 안정성을 예측했는데, 이때 에너지 방출률은 포텐셜 에너지를 층간분리 길이로 수치미분해서 얻었다. 그리고, Yin과 Wang[2]은

경로독립 J-적분(path-independent J-integral)을 이용하여 압축력과 굽힘모멘트의 함수로 에너지 방출률을 계산했고, 이를 이용해서 층간분리가 있는 일차원 보-평판의 좌굴하중과 하중지지능력을 예측했고[3,4], 축대칭 좌굴과 성장을 해석했다[5].

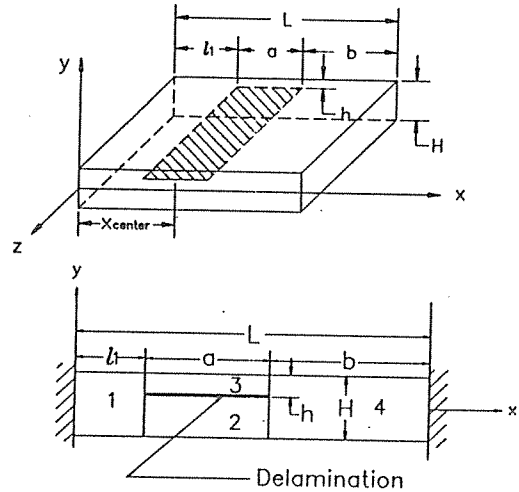
복합재 적층판은 횡전단강성(transverse shear modulus)이 면내강성(inplane Young's modulus)보다 훨씬 작기때문에 횡방향 전단응력의 효과가 매우 중요하므로, 최근 층간분리좌굴현상을 해석하는데 전단변형이론을 많이 이용하고 있다. Kardomateas와 Schmueser[6]는 층간분리가 있는 일차원 보-기둥을 오일러 이론을 써서 해석하고 여기에 전단변형효과를 보정하는 항을 더하는 방법을 이용했다. 또 Chen[7]은 좌우 대칭으로 층간분리가 있는 직교이방성보에 대해 일차 전단변형이론을 기초한 에너지 변분원리(energy variational principle)를 써서 층간분리좌굴과 성장현상을 해석했다.

그러나 이런 해석은 층간분리가 축방향으로 대칭일때만 해석한 것으로 층간분리의 위치에 대한 영향을 알 수 없고, 또 J-적분을 통해 횡전단력까지 포함한 일반적인 에너지 방출률을 구할 필요가 있게 된다. 따라서 본 연구에서는 임의의 길이, 깊이, 위치에 일차원 층간분리가 있는 직교이방성보에 대해 에너지 변분원리를 이용하여 좌굴하중을 계산하고, 좌우 대칭인 모델에 대해 좌굴후 거동에서 전단력을 고려한 J-적분으로 에너지 방출률을 계산해서 층간분리성장의 기준을 나타냈다. 이를 통해 기하학적 조건에 따른 좌굴하중과 에너지 방출률의 변화를 살핌으로서 층간분리가 있을때 구조물의 하중지지양상을 예측할 수 있었다.

2. 수식화

2-1. 평형방정식

층간분리가 있는 양단 고정보(그림 1)에서 좌굴하중을 구하기 위해 다음과 같이 수식화 한다. 보는 길이 L , 두께 H 이고, 균질성, 직교이방성 재료이다. 층간분리는 길이 a 로, 깊이 h 에 위치하고, 기준면에 대해 평형하게 폭방향으로 관통해 있다. 좌굴형상은



$$\bar{h} = \frac{h}{H}, \quad \bar{a} = \frac{a}{L}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{L}, \quad \bar{b} = \frac{b}{L} = 1 - \bar{a} - \bar{l}_1, \quad \alpha = \frac{\bar{a}}{\bar{h}}$$

Fig. 1. Geometry of the model.

일차원으로 폭방향으로 곡률은 없고, 좌굴과정에서 위와 같은 기하학적 특성을 유지한다. 층간분리에 따라 보를, 층간분리가 없는 부분($i=1,4$)과 층간분리 아래쪽($i=2$), 위쪽($i=3$), 네 부분으로 나누어서 수식을 전개한다. 각 부분의 변형은 일차전단변형 이론을 따라 처짐 w_i 와 축방향 변위 u_i , 회전 ψ_i 로 나타낼 수 있다.

압축하중을 받는 일차원보의 포텐셜 에너지는 변형에너지 U 와 외력에 의한 일 V 로 이루어지고, 각 부분층에서 식 (1), (2)로 나타난다. 여기서 k 는 전단보정계수(shear correction factor)를 나타내고, 일차원보를 두께가 큰 보로 가정하여 $\epsilon_{zz}=0$ 인 평면변형률 상태로 식을 전개했다. 따라서 보-평판의 강성은 $\frac{E_x}{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}$ 로 나타난다.

$$U_i = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{E_x}{1-\nu_{xz}\nu_{zx}} \epsilon_{ix}^2 + kG_{xy} \gamma_{ixy}^2 \right) dx dy \quad \dots \quad (1)$$

$$V_i = -P_i \left[\int (u_{i,x} + y \cdot \psi_{i,x}) dx + \frac{1}{2} \int w_{i,x}^2 dx \right] \quad \dots \quad (2)$$

이차변분을 얻기 위해 다음과 같이 변위를 대입한다.

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow u_i^0 + u_i^a \\ \psi_i &\rightarrow \psi_i^0 + \psi_i^a \quad \dots\dots\dots (3) \\ w_i &\rightarrow w_i^0 + w_i^a \end{aligned}$$

여기서 (u^0, w^0, ψ^0)는 처음 평형 상태를 나타내고, (u^a, w^a, ψ^a)는 가상 증분을 나타낸다. 이차변분은 (u^a, w^a, ψ^a)의 이차항으로 나오는 모든 항의 합이므로 변형에너지와 외력에 의한 일의 이차변분은 식 (4), (5)와 같다.

$$\frac{1}{2} \delta^2 U_i = \frac{1}{2} \int \left[\frac{E_x h_i}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} u_{i,x}^{a2} + \frac{E_x h_i}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} \frac{h_i^3}{12} \psi_{i,x}^{a2} + k G_{xy} h_i (\psi_{i,x}^{a2} + 2 \psi_i^a w_{i,x}^a + w_{i,x}^{a2}) \right] dx \quad \dots (4)$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 V_i = - \int [P_i^a u_{i,x}^a dx - \frac{1}{2} P_i^0 w_i^{a2} dx] \quad \dots\dots\dots (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} P_i^0 &= \frac{E_x h_i}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} u_{i,x}^0 \quad \dots\dots\dots (6) \\ P_i^a &= \frac{E_x h_i}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} u_{i,x}^a \end{aligned}$$

그러므로 전체 포텐셜에너지의 이차변분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \delta^2 U + \delta^2 V \\ &= \int F dx \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} F &= - \frac{E_x h_i}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} u_{i,x}^{a2} + D_i \psi_{i,x}^{a2} + k G_{xy} h_i (\psi_i^{a2} + 2 \psi_i^a w_{i,x}^a + w_{i,x}^{a2}) - P_i^0 w_i^{a2} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

식 (7)을 변분법에서의 오일러 방정식에 대입하면 각 부분층에 대한 평형방정식 (8a), (8b), (8c)를 얻을 수 있다.

$$D_i \psi_{i,xx} - k G_{xy} h_i (\psi_i^a + w_{i,x}^a) = 0, \quad \dots\dots (8a)$$

$$k G_{xy} h_i (\psi_{i,x}^a + w_{i,xx}^a) - P_i^0 w_{i,xx}^a = 0, \quad \dots (8b)$$

$$u_{i,xx}^a = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (8c)$$

where

$$h_1 = H, \quad h_2 = H - h, \quad h_3 = h, \quad h_4 = H$$

2-2. 좌굴하중

평형방정식 (8a), (8b), (8c)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$w_i^a = a_{i1} \cos \lambda_i x + a_{i2} \sin \lambda_i x + a_{i3} x + a_{i4}, \quad \dots (9a)$$

$$\begin{aligned} \psi_i^a &= a_{i1} \lambda_i (1 - s \bar{p}_i) \sin \lambda_i x \\ &\quad - a_{i2} \lambda_i (1 - s \bar{p}_i) \cos \lambda_i x - a_{i3}, \quad \dots\dots\dots (9b) \end{aligned}$$

$$u_i^a = k_{i1} x + k_{i2} \quad \dots\dots\dots (9c)$$

where

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{1 - s \bar{p}_1} \frac{P_1^0}{D_1}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{1 - s \bar{p}_2 / (1 - \bar{h})} \frac{P_2^0}{D_2},$$

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{1 - s \bar{p}_3 / \bar{h}} \frac{P_3^0}{D_3}, \quad \lambda_4^2 = \frac{1}{1 - s \bar{p}_4} \frac{P_4^0}{D_4},$$

$$s = \frac{4\pi^2 D_1}{k G_{xy} H L^2} = \frac{\pi^2}{3(1 - \nu_{xz} \nu_{zx})} \frac{E_x}{k G_{xy}} \left(\frac{H}{L} \right)^2,$$

$$\bar{p}_i = \frac{P_i^0}{4\pi^2 / L^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

각 부분에서 처짐, 회전, 축방향변위는 위와 같고 다음의 경계조건과 연속조건을 만족해야 한다.

i. geometric continuity & boundary condition

$$\begin{aligned} w_1^a(0) = 0, \quad \psi_1^a(0) = 0, \quad w_4^a(L) = 0, \quad \psi_4^a(L) = 0 \\ \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1^a(l_1) = w_2^a(l_1) = w_3^a(l_1), \quad \psi_1^a(l_1) = \psi_2^a(l_1) = \psi_3^a(l_1) \\ \dots\dots\dots (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_4^a(l_1 + a) = w_2^a(l_1 + a) = w_3^a(l_1 + a), \\ \psi_4^a(l_1 + a) = \psi_2^a(l_1 + a) = \psi_3^a(l_1 + a) \quad \dots\dots (12b) \end{aligned}$$

$$u_1^a(0) = 0, \quad \dots\dots\dots (13a)$$

$$P_4^a = 0 \quad \text{at } x = L \quad \dots\dots\dots (13b)$$

$$u_1^a(l_1) + \frac{H-h}{2} \psi_1^a(l_1) = u_3^a(l_1) \quad \dots\dots\dots (14a)$$

$$u_1^a(l_1) - \frac{h}{2} \psi_1^a(l_1) = u_2^a(l_1) \quad \dots\dots\dots (14b)$$

$$u_4^a(l_1 + a) + \frac{H-h}{2} \psi_4^a(l_1 + a) = u_3^a(l_1 + a) \quad \dots (14c)$$

$$u_4^a(l_1 + a) - \frac{h}{2} \psi_4^a(l_1 + a) = u_2^a(l_1 + a) \quad \dots\dots (14d)$$

ii. force equilibrium condition

$$P_1^a = P_2^a + P_3^a, \quad V_1^a = V_2^a + V_3^a,$$

$$M_1^a - M_2^a - M_3^a - \frac{P_2^a h}{2} + \frac{P_3^a (H-h)}{2} = 0$$

at $x=l_1 \dots (15)$

$$P_4^a = P_2^a + P_3^a, \quad V_4^a = V_2^a + V_3^a,$$

$$M_2^a + M_3^a - M_4^a + \frac{P_2^a h}{2} - \frac{P_3^a (H-h)}{2} = 0$$

at $x=l_1+a \dots (16)$

where

$$V_i^a = kG_{xy} h_i (\psi_i^a + w_{i,x}^a) - P_i^a w_{i,x}^a, \quad M_i^a = D_i \psi_{i,x}^a \dots (17)$$

식 (9)에서 미정계수가 24개이므로 (11)~(16) 식에 대입하고 정리하면 다음과 같은 형태의 식으로 정리가 된다. 이때 변위 벡터 \mathbf{X} 는 9개의 항으로 줄어들고, 행렬 \mathbf{F} 의 각 성분은 부록에 나타냈다.

$$[\mathbf{F}][\mathbf{X}] = \mathbf{0} \dots (18)$$

$$[\mathbf{X}]^T = [\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}, \bar{a}_{22}, \bar{a}_{23}, \bar{a}_{31}, \bar{a}_{32}, \bar{a}_{41}, k_{31}] \dots (19)$$

where

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{H}, \quad \bar{a}_{i3} = a_{i3} \frac{L}{H}, \quad (i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 4)$$

좌굴하중은 위의 행렬 $[\mathbf{F}]$ 의 행렬식을 0으로 하는 가장 작은 고유치 $\lambda_1 L$ 로 나타난다. 식 (10)을 정리하면 좌굴하중 \bar{P}_1 은 다음과 같은 식 (20)으로 구해진다.

$$\bar{P}_1 = \frac{(\lambda_1 L / 2\pi)^2}{1+s \cdot (\lambda_1 L / 2\pi)^2} \dots (20)$$

여기서 s 는 식 (10)과 같고, $s=0$ 은 전단변형을 고려하지 않은 Euler보 이론에 의한 좌굴하중을 의미한다.

2-3. 에너지 방출률

2-3-1. 좌굴후 거동

층간분리가 대칭으로 존재할때 좌굴후 거동을 해

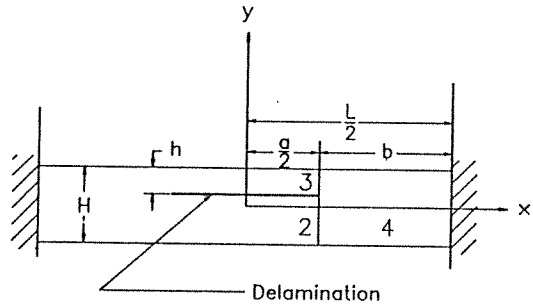


Fig. 2. Geometry of the model for the postbuckling solution.

석한다. 따라서 대칭축의 한쪽만을 해석하면 되므로 좌표계를 그림 2처럼 하여 해석한다. 대칭 성질에서 주어지는 경계조건을 이용하면 각 층의 변형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_2 = A \left\{ \frac{(1-s\bar{P}_4)}{[1-s\bar{P}_2/(1-h)]} \frac{\lambda_4 \sin \lambda_4 b}{\lambda_2 \sin(\lambda_2 a/2)} \left[\cos \lambda_2 x - \cos(\lambda_2 a/2) \right] + 1 - \cos \lambda_4 b \right\}, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \dots (21a)$$

$$w_3 = A \left\{ \frac{(1-s\bar{P}_4)}{[1-s\bar{P}_3/h]} \frac{\lambda_4 \sin \lambda_4 b}{\lambda_3 \sin(\lambda_3 a/2)} \left[\cos \lambda_3 x - \cos(\lambda_3 a/2) \right] + 1 - \cos \lambda_4 b \right\}, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \dots (21b)$$

$$w_4 = A \left\{ 1 - \cos \lambda_4 \left(\frac{L}{2} - x \right) \right\}, \quad \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \dots (21c)$$

$$\psi_2 = (1-s\bar{P}_4) A \frac{\lambda_4 \sin \lambda_4 b}{\sin(\lambda_2 a/2)} \sin \lambda_2 x, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \dots (22a)$$

$$\psi_3 = (1-s\bar{P}_4) A \frac{\lambda_4 \sin \lambda_4 b}{\sin(\lambda_3 a/2)} \sin \lambda_3 x, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \dots (22b)$$

$$\psi_4 = (1-s\bar{P}_4) A \lambda_4 \sin \lambda_4 \left(\frac{L}{2} - x \right), \quad \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \dots (22c)$$

또, 좌굴후에 보-평판은 다음과 같은 축방향 변위 적합조건을 만족해야 한다.

$$(1-\nu_{xz}\nu_{zx})\frac{P_3a}{2E_xh} + \frac{1}{2}\int_0^a(w_{3,x})^2 dx - \frac{\psi_3(a/2)H}{2} \dots\dots\dots (23)$$

$$= (1-\nu_{xz}\nu_{zx})\frac{P_2a}{2E_x(H-h)} + \frac{1}{2}\int_0^a(w_{2,x})^2 dx$$

그러므로 식(23)과 모멘트 평형식(16)에 식(21), (22)를 대입하면 (24), (25)식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{A\lambda_4\sin\lambda_4b}{2}\right)^2 \left\{ \left[\frac{1-s\bar{P}_4}{1-s\bar{P}_3/h}\right]^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\lambda_3a/2)} - \frac{1}{(\lambda_3a/2)\tan(\lambda_3a/2)}\right] - \left[\frac{1-s\bar{P}_4}{1-s\bar{P}_2/(1-h)}\right]^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\lambda_2a/2)} - \frac{1}{(\lambda_2a/2)\tan(\lambda_2a/2)}\right] \right\}$$

$$+ (1-s\bar{P}_4)\frac{2H}{a} \left(\frac{A\lambda_4\sin\lambda_4b}{2}\right) + \frac{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x} \left(\frac{P_3}{h} - \frac{P_4-P_3}{H-h}\right) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$$\left(\frac{A\lambda_4\sin\lambda_4b}{2}\right)(1-s\bar{P}_4) \left[\bar{h}^3\lambda_3\cot\frac{\lambda_3a}{2} + (1-\bar{h}^3)\lambda_2\cot\frac{\lambda_3a}{2} + \lambda_4\cot\lambda_4b\right] - \frac{3(1-\nu_{xz}\nu_{zx})}{E_x H^3} (HP_3-hP_4) = 0 \dots\dots\dots (25)$$

식 (24), (25)는 미지수 A, P₃에 대한 비선형 연립방정식이므로 하중 P₄가 주어질때 A, P₃를 구할 수 있다. 따라서 좌굴후 거동에 대한 처짐과 회전 w_i, ψ_i를 구해서 좌굴후 각 부분에 가해지는 힘과 모멘트를 계산할 수 있다.

2-3-2. 수식유도

층간분리선단에서 힘의 평형상태는 식 (16)으로 나타난다. 이 하중상태를 (26)식처럼 각각 힘의 평형식을 만족하는 두개의 시스템으로 나누어서 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_i &= M'_i + M''_i, \\ P_i &= P'_i + P''_i, \\ V_i &= V'_i + V''_i \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

첫번째 시스템 (M'_i, P'_i, V'_i)을 다음과 같이 정의한다.

$$M'_1=0, M'_2=M_2-(1-\bar{h})^3M_1, M'_3=M_3-\bar{h}^3M_1, \dots\dots\dots (27a)$$

$$P'_1=0, P'_2=-P'_3=\bar{h} \left[P_1+6(1-\bar{h})\frac{M_1}{H} \right] - P_3, \dots\dots\dots (27b)$$

$$V'_1=0, V'_2=-V'_3=V_3-\bar{h}V_1 \dots\dots\dots (27c)$$

두번째 시스템 (M''_i, P''_i, V''_i)은 층간분리선단 근처에서 특이점이 없는 응력상태를 나타낸다. 이런 하중은 모드 I, II의 응력확대계수가 0이므로 에너지 방출률에 영향을 주지 못한다. 따라서 에너지 방출률은 첫번째 시스템에서만 계산하면 된다.

첫번째 시스템에서 하중을 P*, M*, V*로 나타내면 층간분리 선단에서 힘의 평형은 그림 3에서처럼 나타낼 수 있다.

$$M^* = M_3 - \bar{h}^3 M_1, \dots\dots\dots (28a)$$

$$P^* = \bar{h} \left[P_1 + 6(1-\bar{h})\frac{M_1}{H} \right] - P_3, \dots\dots\dots (28b)$$

$$V^* = V_3 - \bar{h}^3 V_1 \dots\dots\dots (28c)$$

J-적분의 정의에 따르면 J-적분은 위층과 아래층에서 응력의 함수이고, 식(28)을 대입해서 층간

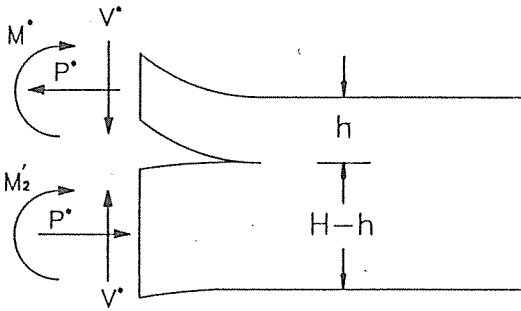


Fig. 3. Decomposed loading parameter.

분리선단을 따라 경로적분하면 에너지 방출률을 구할 수 있다.

$$dJ \equiv \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dy - T_i u_{i,x} ds \quad (i, j=x, y)$$

$$= \left[\frac{1-\nu_{xz} \nu_{zx}}{2E_x} \sigma_x^2 - \frac{\tau_{xy}^2}{kG_{xy}} \right] ds \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\therefore \Gamma = \frac{1-\nu_{xz} \nu_{zx}}{2E_x h} \left[P^{*2} + 12 \left(\frac{M^*}{h} \right)^2 \right] - \frac{6}{5} \frac{V^{*2}}{kG_{xy} h}$$

$$+ \frac{1-\nu_{xz} \nu_{zx}}{2E_x (H-h)} \left[P^{*2} + 12 \left(\frac{P^* H/2 - M^*}{H-h} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{6}{5} \frac{V^{*2}}{kG_{xy} (H-h)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

3. 계산 결과

3-1. 좌굴 하중

실제 계산을 위하여 변수를 다음과 같이 무차원화한다. 층간분리층의 상대적 세장비를 나타내는 인수 α 와 층간분리의 위치를 나타내는 인수 \bar{c} 를 정의한다. 이때 x_{center} 는 $x=0$ 에서 층간분리 중앙까지의 길이이다.

$$\bar{a} = \frac{a}{L}, \quad \bar{b} = \frac{b}{L} = \frac{L-a-l_1}{L} = 1 - \bar{a} - \bar{l}_1,$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{h} = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{\bar{a}}{\bar{h}}, \quad \bar{c} = \frac{x_{center}}{L}$$

식(10)에서 나타낸 전단변형계수 s 를 길이대 두께비(L/H)가 10~50정도 되는 일반적인 복합재료에서, 전단보정계수 k 를 0.83으로 계산해보면 그 값은 0.02~1.5정도되는 범위에 있다. 그러므로 s 를 0.0, 0.2, 0.5에 대해 계산한다. s 값이 0.0이 되는 경우는 정의에 따라 G_{xy} 가 무한히 크다고 가정할 전단변형을 무시하는 경우이다. 또 좌굴하중은 층간분리가 없을때의 좌굴하중으로 무차원화한 \bar{P}_{cr} 로 나타낸다.

먼저 식(20)으로 좌굴하중을 계산해보면 그림4, 5에 나타낸 것처럼, \bar{h} 가 크거나 \bar{a} 가 작으면 α 는 작아지고, 좌굴하중은 층간분리가 없는 보의 좌굴하중과 거의 같다. 반대로 \bar{h} 가 작거나 \bar{a} 가 크면 α 값은 커지고 좌굴하중은 감소한다. 이때 좌굴하중은 일정한 α 값을 넘어서면 급격히 변화한다. 즉, 그림4에서는 α 가 약 0.5를, 그림5에서는 1을 기준으로 좌굴하중이 크게 줄어들고 있다. 그러므로 층간분리는 특정한 크기 이상일때만 좌굴하중에 영향을 준다. 또한 전단변형을 고려하면 좌굴하중은 떨어지고, 그 영향은 α 가 작을 수록 크게 나타난다.

층간분리의 위치에 따른 좌굴하중의 변화를 살펴

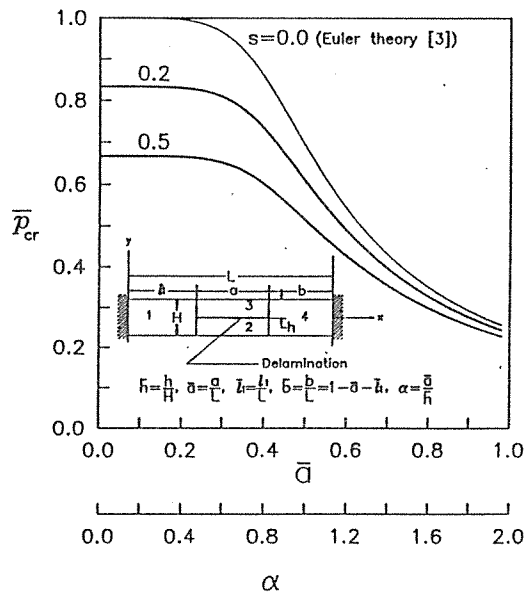


Fig. 4. Effect of transverse shear deformation and delamination length on buckling loads($\bar{h} = 0.5$).

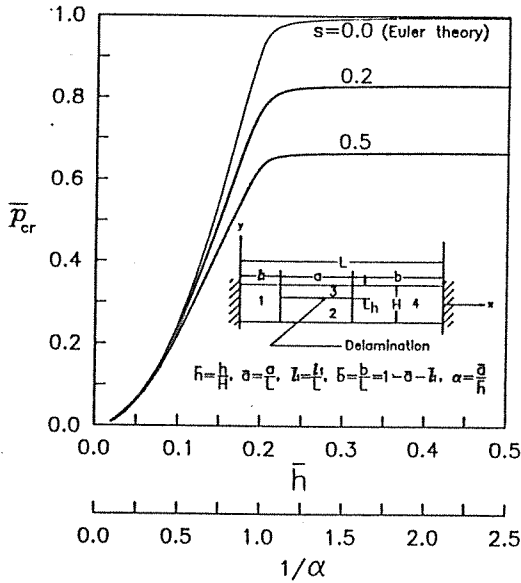


Fig. 5. Effect of transverse shear deformation and delamination thickness on buckling loads ($\bar{a}=0.2$).

보면, \bar{a} 가 0.2에서 0.7정도일때 변화가 크게 나타난다(그림 6). 여기서 \bar{c} 가 0.5일때는 축방향으로 가운데 층간분리가 가운데에 위치하는 것을 뜻한다.

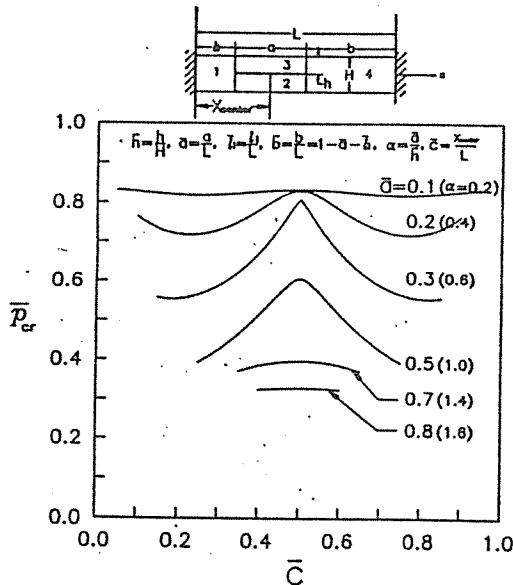


Fig. 6 Effect of delamination location on buckling loads ($\bar{h}=0.5$).

그림 6에서 보면 가장 큰 좌굴하중은 층간분리가 가운데에 있을때 나타나고, 가장 낮은 좌굴하중은 대개 층간분리가 한쪽 끝에 있을 때 나타난다. 그러나, $\bar{a}=0.2$ 일때는 가장 낮은 좌굴하중이 층간분리가 양 끝에서 1/4정도에 위치할 때($\bar{c} \approx 0.25$) 나타난다. 이러한 위치의 영향도 길이와 두께의 상대비 α 에 따라 나타나는 영역이 결정된다. 그림 6에서 α 가 약 1.4이던 위치의 영향이 나타나지 않음을 알 수 있다. 이 영향은 그림 7에서 더 명확히 나타난다. 그림 7에서는 α 가 1일때를 기준으로 층간분리위치의 영향이 나타난다. 그런데 층간분리위치가 두꺼워지면 좌굴하중은 일반적으로 증가하는데, 그림 7을 보면 $\bar{a}=0.2$ 에서 \bar{L}_1 이 작을때, 즉 층간분리가 한쪽 끝에 가까이 있을 때는, \bar{h} 가 증가해도 좌굴하중이 감소하는 현상을 나타낸다.

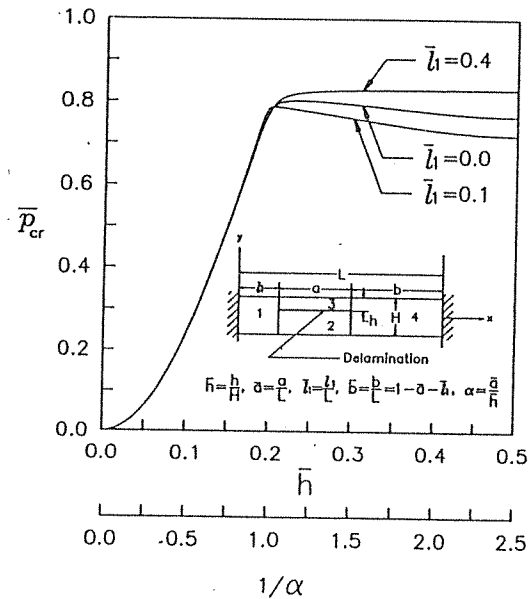


Fig. 7 Delamination buckling load with various location ($\bar{a}=0.2$).

3-2. 에너지 방출률

층간분리좌굴 이후 층간분리성장을 결정하려면 층간분리선단에서 에너지 방출률을 계산해야 한다. 계산된 에너지 방출률이 재료의 물성치인 파괴인성

치보다 크면 성장이 일어나고, 성장이 일어나면 층간분리 좌굴거동이 변하므로 에너지 방출률이 변하게 된다. 변화한 에너지 방출률이 파괴인성치보다 크면 계속 층간분리가 성장하는 불안정 성장을 한다. 만약 변화한 에너지 방출률이 파괴인성치보다 작으면 층간분리는 성장하지 않는다. 따라서 이같은 방법으로 층간분리성장의 안정성을 결정하려면, 그림 8과 같은 층간분리성장에 따른 에너지 방출률의 변화를 알아야 한다.

그림 8에서 $\bar{h}=0.1$ 일때 층간분리길이에 따라 하중과 에너지 방출률의 관계를 나타냈다. 여기서 에너지 방출률은 식(31)처럼 무차원화 했다.

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{D_1 H^2 / L^4} \dots\dots\dots (31)$$

에너지 방출률도 α 값에 따라 다른 형태로 나타났다. 특히 α 값이 작은 경우는 에너지 방출률값이 크지않기 때문에 재료의 파괴인성치에 달하지 못한다. 따라서 층간분리가 두껍고 짧은 경우는 층간분

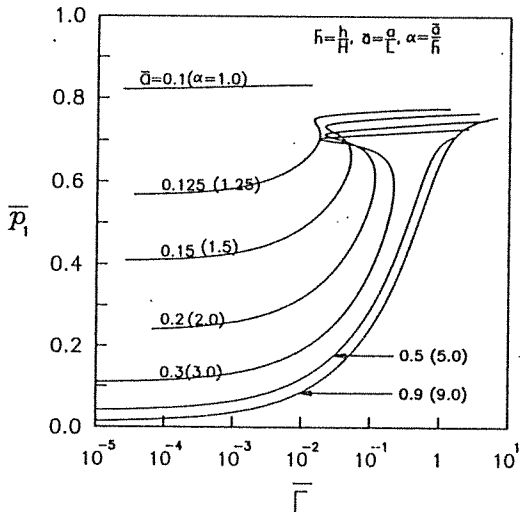
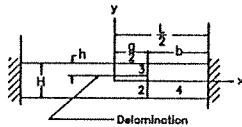


Fig.8 Energy release rate vs. axial load with various delamination length ($\bar{h}=0.1, s=0.2$).

리성장이 일어나지 않고 좌굴하중에서 보-평판이 파손되므로 구조물의 하중지지도능력은 좌굴하중에 따라 결정된다.

전단변형계수 s 를 변화시켜 가면서 계산한 에너지 방출률을 그림 9에 나타냈다. 이에 따르면 전단변

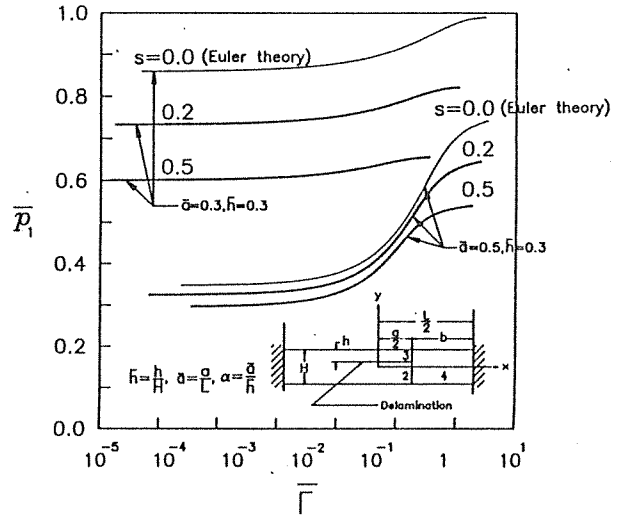


Fig.9 Effect of transverse shear deformation on energy release rate for various delamination configuration.

형효과는 같은 하중 상태에서 에너지 방출률을 크게 한다. 즉, 같은 에너지 방출률이 더 낮은 하중에서 얻어지므로, 전단변형을 고려하지 않을 때보다 층간분리성장이 더 낮은 하중에서 일어나게 된다. 따라서 전단변형을 고려하면 좌굴하중은 낮아지고, 층간분리성장하중도 낮아지기 때문에 구조물의 하중지지도는 더 낮게 예측된다. 따라서 전단변형은 더 엄격하게 구조물의 하중지지도를 평가하게 된다. 그리고, 에너지 방출률에서도 전단변형효과는 층간분리가 짧고 굵을수록 크게 나타나고, 층간분리가 가늘고 길어지면 무시할 수 있을만큼 줄어든다.

4. 결 론

층간분리가 폭방향으로 관통해서 존재하는 직교 이방성 적층보에 대해 일차 전단변형이론을 이용해서 좌굴하중을 구하고, 에너지 방출률을 통한 층간분리

성장해석을 수행하므로써 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째로, 층간분리의 형상에 따라 임계좌굴하중은 큰 변화를 나타냈다. 층간분리가 짧고 두꺼울 수록 좌굴하중은 온전한 보의 좌굴하중에 가까웠고, 층간분리가 가늘고 길수록 좌굴하중은 작은 값을 나타냈다.

둘째로, 층간분리 위치에 따라서 좌굴하중은 변화를 나타냈다. 변화의 크기는 층간분리의 기하학적 형상에 따라 달랐고, 대체로 층간분리가 중앙에서 멀어질수록 하중은 떨어졌다.

셋째로, 횡단면형의 효과는 임계좌굴하중을 낮추고, 에너지 방출률을 크게 했다. 그리고 층간분리층이 짧고 두꺼울수록 그 영향은 크게 나타났다. 그러므로, 전단변형을 고려하면 좌굴하중은 낮아지고 에너지 방출률은 커지므로 구조물의 정확한 하중지지를 예측할 수 있다.

본 논문에서는 현상을 명확히 이해하고 수식전개를 간편하게 하기 위해 직교이방성재료에 대해 일차원 해석을 수행했다. 그러나, 실제 이용하는 복합재 적층구조물은 준등방성적층판이나 직교적층판의 형태로 제작되므로, 구조물의 하중지지를 정확히 예측하기 위해서는 이러한 적층순서같은 적층구조의 특성을 고려한 해석이 앞으로 계속되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Chai, H., Babcock, C.D., and Knauss, W.G., "One Dimensional Modeling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.17, No. 11, 1981,

pp.1069-1083.

2. Yin, W.L., and Wang, J.T.S., "The Energy-Release-Rate in the Growth of a One-Dimensional Delamination," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.51, December 1984, pp. 939-941.

3. Simites, G.J., Sallam, S.N., and Yin, W. L., "Effect of Delamination of Axially Loaded Homogeneous Laminated Beam-Plate," *AIAA Journal*, Vol.23, No.9, 1985, pp.1437-1445.

4. Yin, W.L., Sallam, S.N., and Simites, G.J., "Ultimate Axial Load Capacity of a Delaminated Beam-Plate," *AIAA Journal*, Vol.24, No. 1, 1986, pp.123-128.

5. Yin, W.L., "Axisymmetric Buckling and Growth of a Circular Delamination in a Compressed Laminate," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.21, No.5, 1985, pp.503-514.

6. Kardomateas, G.A., and Schmueser, D. W., "Buckling and Postbuckling of Delaminated Composites Under Compressive Loads Including Transverse Shear Effects," *AIAA Journal*, Vol.26, No.3, 1988, pp.337-343.

7. Chen, H.P., "Shear Deformation Theory for Compressive Delamination Buckling and Growth," *AIAA Journal*, Vol.29, No.5, 1991, pp. 813-819.

8. Tsai, S.W., *Introduction to Composite Materials*, Technomic publishing Co Inc., 1980.

9. Whitney, J.M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Co Inc., 1987.

부 록

식(18)에 나타낸 행렬 $[F]$ 의 성분은 다음과 같다. 여기에 나타내지 않은 성분은 0이다.

$$F_{13} = \frac{\bar{h}}{1-h} \left[\sin \frac{\lambda_1 L}{1-h} (\bar{l}_1 + \bar{a}) - \sin \frac{\lambda_1 L}{1-h} \bar{l}_1 \right]$$

$$F_{16} = \frac{1-\bar{h}}{h} \left[\sin \frac{\lambda_1 L}{h} (\bar{l}_1 + \bar{a}) - \sin \frac{\lambda_1 L}{h} \bar{l}_1 \right]$$

$$F_{14} = -\frac{\bar{h}}{1-h} \left[\cos \frac{\lambda_1 L}{1-h} (\bar{l}_1 + \bar{a}) - \cos \frac{\lambda_1 L}{1-h} \bar{l}_1 \right]$$

$$F_{17} = -\frac{1-\bar{h}}{h} \left[\cos \frac{\lambda_1 L}{h} (\bar{l}_1 + \bar{a}) - \cos \frac{\lambda_1 L}{h} \bar{l}_1 \right]$$

$$F_{19} = -\frac{2\lambda_1 L \bar{a}}{1-\bar{h}}$$

$$F_{21} = \cos\lambda_1 L \bar{l}_1 - 1$$

$$F_{22} = \sin\lambda_1 L \bar{l}_1 + \sin\lambda_1 L \bar{b}_1 - \frac{\lambda_1 L(1-\bar{a})}{1+s(\lambda_1 L/2\pi)^2} + \tan\lambda_1 L(1-\cos\lambda_1 L \bar{b})$$

$$F_{23} = \cos\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}}(\bar{l}_1 + \bar{a}) - \cos\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}}\bar{l}_1$$

$$F_{24} = \sin\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}}(\bar{l}_1 + \bar{a}) - \sin\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}}\bar{l}_1$$

$$F_{25} = \bar{a}$$

$$F_{28} = 1 - \cos\lambda_1 L \bar{b}$$

$$F_{31} = \cos\lambda_1 L \bar{l}_1 - 1$$

$$F_{32} = \sin\lambda_1 L \bar{l}_1 + \sin\lambda_1 L \bar{b}_1 - \frac{\lambda_1 L[1+\bar{a}(1-\bar{h})/\bar{h}]}{1+s(\lambda_1 L/2\pi)^2} + \tan\lambda_1 L(1-\cos\lambda_1 L \bar{b})$$

$$F_{35} = -\frac{1-\bar{h}}{\bar{h}}\bar{a}$$

$$F_{36} = \cos\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}}(\bar{l}_1 + \bar{a}) - \cos\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}}\bar{l}_1$$

$$F_{37} = \sin\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}}(\bar{l}_1 + \bar{a}) - \sin\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}}\bar{l}_1$$

$$F_{38} = 1 - \cos\lambda_1 L \bar{b}$$

$$F_{41} = \lambda_1 L \sin\lambda_1 L \bar{l}_1$$

$$F_{42} = \lambda_1 L - \lambda_1 L \cos\lambda_1 L \bar{l}_1$$

$$F_{43} = -\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \sin\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{44} = \frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \cos\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{45} = 1+s\left(\frac{\lambda_1 L}{2\pi}\right)^2$$

$$F_{51} = \lambda_1 L \sin\lambda_1 L \bar{l}_1$$

$$F_{52} = -\lambda_1 L \left(\cos\lambda_1 L \bar{l}_1 + \frac{1-\bar{h}}{\bar{h}} \right)$$

$$F_{55} = -\frac{1-\bar{h}}{\bar{h}} \left[1+s\left(\frac{\lambda_1 L}{2\pi}\right)^2 \right]$$

$$F_{56} = -\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \sin\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{57} = \frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \cos\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{62} = \lambda_1 L (\cos\lambda_1 L \bar{b} - 1 + \tan\lambda_1 L \sin\lambda_1 L \bar{b})$$

$$F_{63} = \frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \sin\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{64} = -\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \cos\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{65} = -\left[1+s\left(\frac{\lambda_1 L}{2\pi}\right)^2 \right]$$

$$F_{68} = \lambda_1 L \sin\lambda_1 L \bar{b}$$

$$F_{72} = \lambda_1 L \left(\cos\lambda_1 L \bar{b} + \frac{1-\bar{h}}{\bar{h}} + \tan\lambda_1 L \sin\lambda_1 L \bar{b} \right)$$

$$F_{75} = \frac{1-\bar{h}}{\bar{h}} \left[1+s\left(\frac{\lambda_1 L}{2\pi}\right)^2 \right]$$

$$F_{76} = \frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \sin\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{77} = -\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \cos\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{78} = \lambda_1 L \sin\lambda_1 L \bar{b}$$

$$F_{81} = \cos\lambda_1 L \bar{l}_1$$

$$F_{82} = \sin\lambda_1 L \bar{l}_1$$

$$F_{83} = -(1-\bar{h}) \cos\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{84} = -(1-\bar{h}) \sin\frac{\lambda_1 L}{1-\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{86} = -\bar{h} \cos\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{87} = -\bar{h} \sin\frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} \bar{l}_1$$

$$F_{89} = -6\bar{h}$$

$$F_{92} = -\sin\lambda_1 L \bar{b} + \tan\lambda_1 L \cos\lambda_1 L \bar{b}$$

$$F_{93} = -(1 - \bar{h}) \cos \frac{\lambda_1 L}{1 - \bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{94} = -(1 - \bar{h}) \sin \frac{\lambda_1 L}{1 - \bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{96} = -\bar{h} \cos \frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{97} = -\bar{h} \sin \frac{\lambda_1 L}{\bar{h}} (\bar{l}_1 + \bar{a})$$

$$F_{98} = \cos\lambda_1 L \bar{b}$$

$$F_{99} = -6 \bar{h}$$

