

論文

단섬유 복합재료의 거동에 대한 확률 유한 요소 해석

강명석* · 윤성기*

Stochastic Finite Element Analysis of the Behavior of Short Fiber Reinforced Composite Materials

Myung-Seok Kang* and Sung-Kie Youn*

ABSTRACT

For the analysis of the response of structural members made of short-fiber-reinforced-composites, in which short fibers are randomly oriented in the matrix with certain directionality, probabilistic computational techniques are used and compared. Mean direction of fibers and standard deviation of the direction of fibers are selected as the random variables which describe the effective material properties of the short fiber composite materials. Effective material properties are obtained by use of the classical lamination theory and Monte-Carlo integration. Monte-Carlo method, PFEM(probabilistic finite element method using perturbation method) and PEPM(point-estimate-for-probabilistic-moment method) are used for the analysis and the results are compared. As the result of the study, a modified PEPM is proposed.

In general, PEPM yields reasonably accurate results for the probabilistic response of the composites. However when the effective properties of the composites are obtained by the aforementioned way PFEM yields unacceptably large errors in the standard deviation of the stresses. For the calculation of stresses, the proposed PEPM yields satisfactory results even though the method requires significantly less computations than the original PEPM.

초 록

섬유가 방향성을 가지고 무작위로 함침된 단섬유강화복합재료로 만들어진 구조재의 해석을 위한 확률해석기법들을 비교하였다. 단섬유강화복합재료의 유효물성을 나타내는 인자로 섬유의 평균방향과 섬유방향의 표준편차를 선정하고 유효물성을 얻는 방법으로 고전적층이론과 Monte-Carlo 적분을 이용하였다. 확률해석기법으로는 Monte-Carlo 방법과 PEPM, PFEM을 사용하여 결과를 비교하였다. 그리고 수정된 PEPM 방법을 제안하였다.

일반적으로 PFEM은 확률해석에 있어서 상당히 정확한 결과를 제공한다. 그러나 복합재료의 물성을 얻는 방법으로 앞서의 방법을 이용하였을 때 응력의 표준편차는 매우 큰 오차를 나타내었다. 응력의 계산에 있어서 제안된 PEPM을 수정한 방법은 원래의 PEPM에 비하여 계산량을 현격히 줄이면서 만족할만한 결과를 제공하였다.

* 한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

단섬유강화복합재료(short fiber reinforced composite materials)는 사출성형, 압축성형, 그리고 압출 등에 사용될 수 있다. 단섬유강화복합재료의 가공과정에서 섬유 방향은 기지의 유동에 따라 영향을 받는다. 섬유가 섞여있는 액상의 기지는 거푸집(die)이나 주형(mold)의 형상을 따라 흐르고 특히 전단 유동에 의해 섬유가 방향성을 가진 상태로 굳어진다 [1].

만일 섬유의 방향이 각 방향에 균일한 분포를 갖는다면 복합재료의 특성을 등방성이라고 가정할 수 있다. 그러나 실제로 섬유는 방향성을 가지고 배열하게 되며 유동에 의해 섬유가 방향성을 갖는 과정에서 섬유의 방향에 불확정성을 포함한다. 이 불확정성은 재료의 기계적, 물리적 성질에 영향을 주게 되어 단섬유강화복합재료의 해석에 확률적인 개념의 도입이 필요하다.

역학에서 확률적인 개념을 도입하는 방법은 크게 확률적인 접근방법과 비확률적인 접근방법으로 구분할 수 있다.

확률적인 접근방법은 표본추출과 추정(Estimation)을 포함한 모의 실험(Simulation)으로 Monte-Carlo 방법[2,3], 응답면 방법(Response Surface method), 그리고 확률모멘트를 위한 점추정 방법(Point-Estimate-for-Probability-moment, PEPM method)[4]등이 있다. 이러한 방법들은 복잡한 문제에 적용 가능하고 특히 비선형, 그리고 큰 자유도수를 가지는 계에서 유용하다. 표본추출기법들의 정확도는 표본추출의 크기(sampling size)와 관계된다.

비확률적인 방법으로는 섭동법(perturbation method)을 이용한 확률유한요소법(PFEM, probabilistic finite element method)[5,8]과 스펙트럴 방법을 이용한 확률유한요소법[9,11] 등이 있다.

본 논문에서는 방향성을 가지고 배열된 단섬유를 갖는 복합재료에 대해 유효물성을 결정하기 위한 무작위 변수(random variable)를 섬유의 평균방향과 표준편차로 설정하고, 섬유방향의 불확정성에 의한 물성의 불확정성을 고려하여 변형률과 응력의 확률

특성을 구하는 방법으로 Monte-Carlo 방법과 섭동법을 이용한 확률유한요소법, 확률모멘트를 위한 점추정방법을 비교 검토하고 수정된 확률모멘트를 위한 점추정방법을 제안한다.

2. 단섬유강화복합재료의 물성

단섬유강화복합재료의 강성에는 섬유의 배열과 기지와 섬유의 혼합비, 그리고 섬유의 길이가 영향을 준다. 그러나 섬유와 기지가 잘 혼합되어 있는 경우 섬유와 기지의 혼합비와 섬유의 길이의 효과는 전체적으로 균일하다고 할 수 있다. 그러나 섬유의 배열은 성형과정에서 결정되며 압축성형, 압출 등의 가공중 섬유의 방향은 전단유동에 의해 전단방향으로 배열하는 경향을 보인다. 따라서 재료의 물성에 대한 확률적 특성은 섬유방향의 확률적 특성에 주로 영향을 받는다고 볼 수 있다.

단섬유강화복합재료의 경우 섬유배열은 방향성을 가지며 이를 표현하기위한 변수로 섬유들의 평균방향 $\bar{\phi}$ 와 섬유가 흩어진 정도를 나타내는 표준편차 S_{ϕ} 가 필요하다.

방향성을 가지며 흩어진 섬유를 갖는 복합재료의 물성을 얻는 방법으로 미시적인 유한요소모형을 사용한 유한요소해석의 결과로부터 유효물성을 환산하는 방법[12]이 일반적이나 단일방향으로 섬유가 배열된 경우에 대한 Halpin-Tsai의 식[13,14]을 이용하여 Monte-Carlo 적분을 이용하면 간단히 물성을 구할 수 있다.

Monte-Carlo 적분을 이용하여 물성을 얻는 방법으로 무작위로 분포한 섬유를 갖는 복합재료는 단일 방향을 갖는 단섬유강화복합재료의 박판을 무작위로 적층한것과 같다고 가정[15]한다. 만일 섬유방향이 평균방향을 갖고 정규분포로 흩어져있는 경우라면 단일방향을 갖는 박판의 적층과 동등화하기 위해 박판들의 각 방향이 섬유와 같은 확률분포를 갖도록 한다.

적층의 유효물성은 고전적층이론(Classical Lamination Theory)[16]로부터 구한다. 힘과 변형률, 곡률 간의 관계에서 적층된 박판의 방향성이 x-y 평면에 대칭이면 연계강성(coupling stiffness)이 제거

되고 평균방향 $\bar{\phi}$ 에 대해서 대칭으로 배치하면 평면내 연계항이 소거되어 직교이방성의 성질을 갖게된다. 이때 고전적층이론(Classical Lamination Theory)으로부터 적층된 복합재료의 유효물성 $E_{11}^0, E_{22}^0, \nu_{12}^0$ 그리고 G_{12}^0 를 구한다.

3. 섭동법을 이용한 확률유한요소법

섬유의 평균방향 $\bar{\phi}$ 와 섬유방향의 분산 S_ϕ 를 무작위 변수(random variable)로 하여 이 무작위 변수들의 불확정성에 대한 영향을 알아보기 위해 섭동법을 이용한 확률유한요소법의 수식을 전개한다. 이때 무작위변수 $b(x)$ 는

$$b(x) = [\bar{\phi}(x), S_\phi(x)]^T \dots\dots\dots (1)$$

이다.

섭동법을 이용한 확률유한요소법은 불확정성을 포함하는 행렬과 벡터들을 무작위변수 $b(x)$ 의 평균치에 대해 Taylor 급수로 전개하여 무작위변수 $b(x)$ 의 평균 $\bar{b}(x)$ 로부터 Δb_i 의 이차다항식으로 표현하여 확률유한요소방정식을 얻는다.

3-1. 확률유한요소방정식

유한요소방정식은

$$K(b) u(b) = f(b) \dots\dots\dots (2)$$

이다. 이때 K 는 강성행렬, f 는 절점의 힘벡터, u 는 절점의 변위벡터, $b(x)$ 는 무작위변수이다. 무작위변수 $b(x)$ 는 평균 $\bar{b}(x)$ 로부터 무작위의 편차(random deviation) Δb_i 를 갖는다.

행렬 $K(b)$ 와 벡터 $u(b), f(b)$ 를 $\bar{b}(x)$ 에 대해 이차항까지 Taylor 급수로 전개하고 Δb_i 에 대해 같은 차수별로 정리하면 $\bar{u}, \bar{u}_{,b_i}$, 그리고 $\bar{u}_{,b_i b_j}$ 에 대한 다음의 확률유한요소방정식을 얻는다. 여기서 아래 첨자 b_i 는 편미분을 의미한다.

0 차의 방정식

$$\bar{K} \bar{u} = \bar{f} \dots\dots\dots (3)$$

1 차의 방정식

$$\bar{K} \bar{u}_{,b_i} = f \quad i=1, \dots, q \dots\dots\dots (4)$$

여기서

$$f_i(\bar{u}, \bar{b}) = \bar{f}_{,b_i} - \bar{K}_{,b_i} \bar{u} \dots\dots\dots (5)$$

2 차의 방정식

$$\bar{K} \bar{u}_2 = f_2 \dots\dots\dots (6)$$

여기서

$$f_2(\bar{u}, \bar{u}_{,b}, \bar{b}) = \sum_{i,j=1}^q \left[\frac{1}{2} \bar{f}_{,b_i b_j} - \frac{1}{2} \bar{K}_{,b_i b_j} \bar{u} - \bar{K}_{,b_i} \bar{u}_{,b_j} \right] \text{Cov}(b_i, b_j) \dots\dots\dots (7)$$

그리고

$$u_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q \bar{u}_{,b_i b_j} \text{Cov}(b_i, b_j) \dots\dots\dots (8)$$

단섬유강화복합재료에서 강성행렬 $K(b)$ 와 절점의 힘벡터 $f(b)$ 는 섬유의 평균방향 $\bar{\phi}$ 와 방향의 표준편차 S_ϕ 의 함수이다. 섬유의 평균방향 $\bar{\phi}$ 와 표준편차 S_ϕ 는 공간좌표에 대해서 이산화되어 무작위변수가 되며 무작위변수의 벡터 b 를 구성한다. 식 (4), (7), (8)에서 q 는 무작위변수의 갯수이다.

무작위변수간의 상관관계(correlation)가 있는 경우 2차의 식(7)과 (8)의 계산량은 무작위변수의 갯수의 제곱에 비례하는 양이 되어 무작위변수의 갯수가 큰 경우 계산량이 상당히 커진다. 그러나 만일 b_i 가 상관관계가 없다면 식(7)과 (8)에서 공분산 행렬 $\text{Cov}(b_i, b_j)$ 은 분산 $\text{Var}(b_i)$ 을 포함하는 대각행렬이 되어 첨자 i, j 에 대한 이중합은 i 만에 대한 단일합으로 나타난다. 이때 계산량은 무작위변수의 갯수에 비례하는 양으로 줄어든다.

3-2. 변위, 변형률 그리고 응력에 대한 확률분포

무작위변수 b_i 가 서로 독립일때 절점의 변위에 대한 평균과 분산은

$$E[u] = \bar{u} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \bar{u}_{,b_i b_i} \text{Var}(b_i) \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{Cov}(u^e, u^f) = \sum_{i=1}^q \bar{u}_{,b_i}^e \bar{u}_{,b_i}^f \text{Var}(b_i) \dots\dots\dots (10)$$

또한 요소(element) e에 대한 변형률과 응력의 평균은

$$E[\varepsilon^e] = B^e \bar{u}^e + B^e \bar{u}_2^e \dots\dots\dots (11)$$

$$E[\sigma^e] = \bar{D} E[\varepsilon^e] + \sum_{i=1}^q [\bar{D}_{,b_i}^e B^e \bar{u}_{,b_i}^e + \frac{1}{2} \bar{D}_{,b_i b_i}^e B^e \bar{u}^e] \text{Var}(b_i)$$

그리고 요소 e와 요소 f에 대한 변형률과 응력의 공분산은

$$\text{Cov}(\varepsilon^e, \varepsilon^f) = \sum_{i=1}^q (B^e \bar{u}_{,b_i}^e) (B^f \bar{u}_{,b_i}^f)^T \text{Var}(b_i) \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\sigma^e, \sigma^f) &= \sum_{i=1}^q [(\bar{D}^e B^e \bar{u}_{,b_i}^e) (\bar{D}^f B^f \bar{u}_{,b_i}^f)^T \\ &+ (\bar{D}_{,b_i}^e B^e \bar{u}^e) (\bar{D}_{,b_i}^f B^f \bar{u}^f)^T \\ &+ (\bar{D}^e B^e \bar{u}_{,b_i}^e) (\bar{D}_{,b_i}^f B^f \bar{u}^f)^T \\ &+ \bar{D}_{,b_i b_i}^e B^e \bar{u}^e (\bar{D}_{,b_i b_i}^f B^f \bar{u}^f)^T] \text{Var}(b_i) \dots (13) \end{aligned}$$

이 된다.

4. 확률모멘트를 위한 점추정 방법

4-1. 확률모멘트를 위한 점추정 방법 (Point-estimate method)

확률모멘트를 위한 점추정방법은 점추정을 이용하여 무작위함수 $u=u[x]$ 에 대한 확률모멘트 $E[u^n]$ 을 얻는 방법이다. 유한요소방정식은 식(2)로부터

$$u(b) = K(b)^{-1} f(b) \dots\dots\dots (14)$$

으로 나타낼 수 있고 q개의 무작위변수 b_i 에 대한 확률밀도함수를 f_b 라 할때 n차 확률모멘트는

$$E[u^n] = \int [u(b_1, b_2, \dots, b_q)]^n f_b(b_1, b_2, \dots, b_q) db_1 db_2 \dots db_q \dots\dots\dots (15)$$

이 된다. 이제 무작위함수 u의 평균은

$$\begin{aligned} E[u] &= \frac{1}{q} [u(+, +, \dots, +) + u(+, +, \dots, -) \\ &+ \dots + u(+, -, \dots, -) + u(-, -, \dots, -)] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

이고 분산은

$$\begin{aligned} S_u^2 &= \frac{1}{2^q} [\{u(++\dots+, ++\dots+)\}^2 \\ &- u(-\dots-, -\dots-)\}^2 \\ &+ \{u(++\dots+, ++\dots+)\} \\ &- u(-\dots-, -\dots-)\}^2 \\ &+ \dots + \{u(-\dots-, -\dots-)\} \\ &- u(++\dots+, ++\dots+)\}^2 \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

여기서 $u(\pm, \pm, \dots, \pm) = u(b_{1\pm}, b_{2\pm}, \dots, b_{q\pm})$ 이고 $b_{i\pm}$ 는 u의 표본추출에 사용될 i번째 무작위변수의 값으로 무작위변수가 정규분포를 할 때

$$b_{i\pm} = \bar{b}_i \pm S_{b_i} \dots\dots\dots (18)$$

의 값을 갖는다.

PEPM은 무작위변수의 수가 작은 경우, 응답의 확률특성을 구하는데 효과적인 방법이다. 그러나 q개의 무작위변수에 대해 2^q 번의 모의실험을 행해야 하므로 무작위변수의 수가 많을수록 계산량은 급격히 증가한다.

4-2. 수정된 확률모멘트를 위한 점추정 방법

단섬유강화복합재료의 경우를 본다면 물성은 두개의 변수 섬유와 평균방향 $\bar{\phi}$ 와 방향의 표준편차 S_ϕ 로 결정된다. 그런데 $\bar{\phi}$ 와 S_ϕ 는 위치의 함수가 되며 유한요소해석에서는 이 값들을 이산화하게 된다. 이산화된 $\bar{\phi}$ 와 S_ϕ 의 조합이 $\frac{q}{2}$ 개라면 전체 무작위변수의 갯수는 q개가 된다. 이 경우 PEPM을 적용하면 2^q 번의 FEM방정식을 풀어야 한다.

그런데 함수 u의 인자 b중에서 몇개의 요소의 작은 변화는 민감도가 큰 경우를 제외하면 함수값에 큰 영향을 미치지 않고 식(18)과 (19)는 다음 4개의 항을 이용하여 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} &u(++\dots+, ++\dots+), u(++\dots+, -\dots-), \\ &u(-\dots-, ++\dots+), u(-\dots-, -\dots-) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

이때 평균과 분산은

$$E[u] \cong \frac{1}{4} [u(++\dots+, ++\dots+) +$$

$$u(++\dots+, -\dots-) + u(-\dots-, ++\dots+) + u(-\dots-, -\dots-)] \dots\dots\dots (20)$$

$$S_u^2 = \frac{1}{16} [\{u(++\dots+, ++\dots+) - u(-\dots-, ++\dots+)\}^2 + \{u(++\dots+, ++\dots+) - u(++\dots+, -\dots-)\}^2 + \{u(-\dots-, -\dots-) - u(++\dots+, -\dots-)\}^2 + \{u(-\dots-, -\dots-) - u(-\dots-, ++\dots+)\}^2 - \{u(-\dots-, ++\dots+) - u(++\dots+, -\dots-)\}^2] \dots\dots\dots (21)$$

으로 근사할 수 있다. 위의 근사로 분산값은 민감도가 큰 변수에 대한 효과를 모두 나타내지는 못하는 제한을 갖는다. 그러나 약간의 오차를 감수한다면 q개의 무작위변수에 대해 2^q번 방정식을 풀어야 하는 계산량을 단지 4번 방정식을 푸는 계산량으로 현격히 줄이는 장점을 갖는다.

5. 수치해석결과

단섬유강화복합재료는 성형시 유동량과 방향에 따라 섬유 방향성이 나타난다. Fig. 1에는 부분적으로 방향성이 다른 재료에 대해 섬유의 방향성을 이산화한 예를 보였다.

일반적으로 위에서 제시된 방법들을 등방성의 재료에 적용하면 거의 일치하는 결과를 보인다. 그러나 단섬유강화복합재료의 경우 유효물성을 사용한 해석을 하게되며 적절한 유효물성을 구하는데 어려움이 있다. 본 연구에서는 Halpin-Tsai의 식과 Monte-Carlo 적분을 이용하여 유효물성을 구하고 Monte-Carlo 모의실험과 섭동법을 이용한 확률유한요소법(PFEM), 확률모멘트를 위한 점추정방법(PEPM)과 수정된 PEPM의 결과를 비교하였다. Monte-Carlo 해석으로 800회의 모의실험을 수행하였다. Fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7에서는 y = 0.1126에서의 각 방향에 대한 변형률과 응력의 표준편차값을 비교했다. 평균값에 대한 그래프는 나타내지 않았으나 방법에 관계없이 일치하였고, 표준편차의 값들은 Monte-Carlo

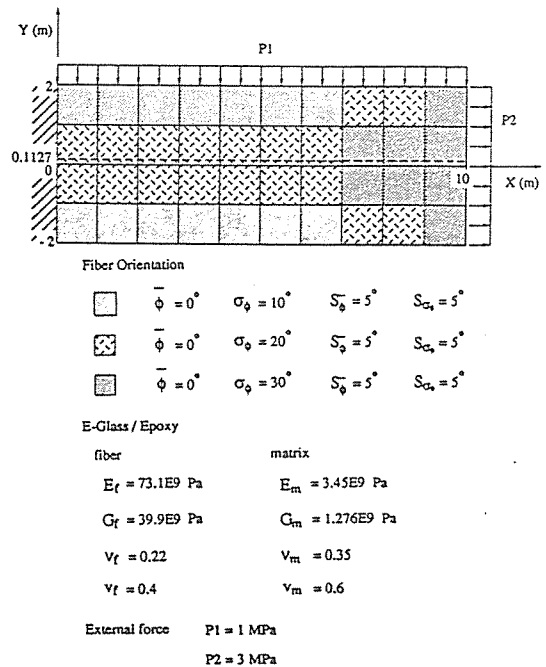


Fig. 1. Model of statistical analysis of short fiber reinforced composite materials

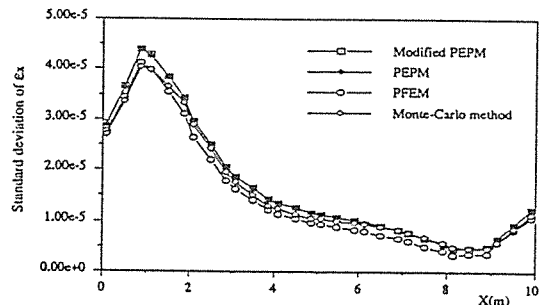


Fig. 2. Standard deviation of ϵ_x when $y=0,1127$

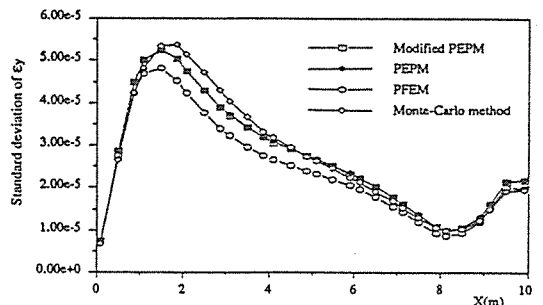


Fig. 3. Standard deviation of ϵ_y when $y=0,1127$

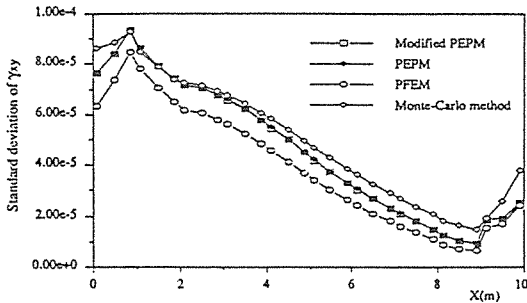


Fig. 4. Standard deviation of γ_{xy} when $y=0.1127$

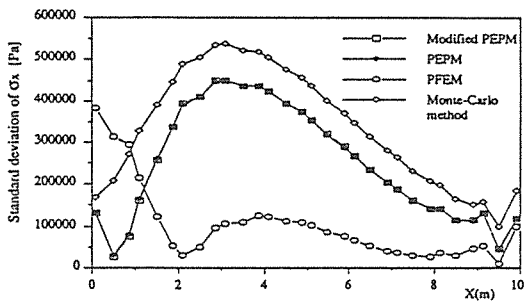


Fig. 5. Standard deviation of σ_x when $y=0.1127$

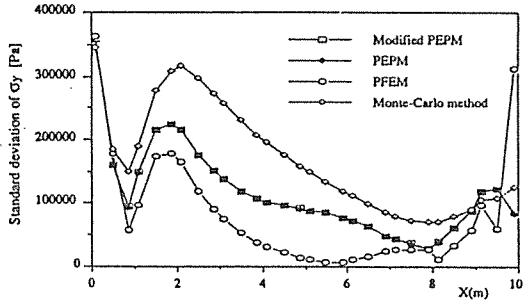


Fig. 6. Standard deviation of σ_y when $y=0.1127$

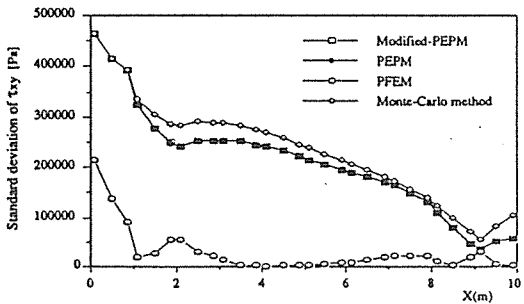


Fig. 7. Standard deviation of τ_{xy} when $y=0.1127$

방법에 대해 얼마간의 오차를 보이고 있다.

특히 PFEM은 응력의 표준편차에서 큰 오차를 보인다. 이는 PFEM의 수식화 과정에서 포함되는 미분항에 의한 것으로 판단된다. PFEM은 물성의 미분값을 얻어야 하므로 복합재료의 유효물성이 Monte-Carlo 적분을 이용하는 까닭에 수치미분의 과정에서 큰 오차를 갖는다. 특히 응력의 표준편차의 각 항은 물성의 미분항을 포함한 식으로 부터 구한 변위의 미분 $\bar{u}_{,b}$ 또는 재료의 응답행렬 $\bar{D}_{,b}$ 의 곱으로 나타나 오차가 더욱 커질 것으로 예상된다. 따라서 PFEM은 물성을 해석적인 형태의 식으로 표현하여 미분에 의한 오차를 최소화할 때 적합하다.

그러나 PFEM은 점추정방법의 하나로 물성의 미분값이 필요하지 않는 방법이다. 응력의 표준편차에 대한 해석결과에서 볼 수 있듯이 PFEM의 결과는 Monte-Carlo 모의실험에 의한 결과에 상당히 근사한다. 그러나 무작위변수의 수가 하나 증가할때 점추정의 횟수는 두배로 증가하는 부담을 갖는다. 따라서 무작위변수의 개수가 10개만 되어도 1024번의 모의실험이 필요하여 Monte-Carlo 방법에 대한 장점은 없어진다. 본 예제의 경우 방향성을 3가지 형태로 이산화 하였고 각각 섬유 방향과 표준편차의 2개 무작위 변수가 있어 모두 6개의 무작위변수가 존재한다. 이때 PEPM은 64번의 점추정 횟수가 필요하였다.

이에 반해 수정된 PEPM의 경우 단지 4번의 점추정만으로 원래의 PEPM과 거의 일치하는 결과를 얻었다.

6. 결 론

단섬유강화복합재료의 확률해석을 위해서 단섬유가 포함된 재료의 특성을 규정하는 인자를 섬유의 평균방향과 방향의 분산으로 설정하고, 이 두 변수를 무작위변수로 하여 유효물성을 구한다. 그리고 이 무작위변수에 대해 FEM을 통한 확률해석기법을 도입하였다.

단섬유복합재료의 유효물성은 고전적층이론과 Monte-Carlo 적분을 결합하여 구할 수 있다.

섭동법을 이용한 확률유한요소법을 적용한 결과

위의 방법으로 유효물성을 결정하는 과정에 대해서는 부적합함을 알 수 있었다. 이것은 섭동법을 적용하는 과정에서 물성의 무작위변수에 대한 미분항이 포함되고 이 미분항에 큰 오차가 포함되어 나타나는 결과였다.

그래서 미분항을 포함하지 않는 방법으로 확률모멘트를 위한 점추정방법(PEPM)을 도입하였다. 실제로 PEPM은 PFEM에 비해 Monte-Carlo 모의실험의 결과에 상당히 근사하였으나 무작위변수의 수가 늘어나는 경우 이 방법은 계산량이 급격히 증가하는 단점이 있다. 그래서 PEPM을 수정하여 적은 계산량으로 원래의 PEPM을 근사하는 방법을 제안하였다. 계산 결과 수정된 PEPM은 계산량은 현격히 줄이면서 결과는 원래의 PEPM과 거의 일치함을 볼 수 있었다.

참 고 문 헌

1. C.L. Tucker III, "Predicting Fiber Orientation in Short Fiber Composites", *Proceedings of manufacturing International '88*, pp.95-104
2. R.Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, 1981
3. A.H.S. Ang and W.H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II: Decision, Risk and Reliability*, John Wiley & Sons, New York, 1984
4. Flex S. Wong, "First-order, second-order methods", *Comput. & Struct.*, Vol.20, No.4, 1985, pp.779-791
5. W.K. Liu, T. Belytschko and A. Mani, "Random finite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.23, 1986, pp.1831-1845
6. W.K. Liu, T. Belytschko and A. Mani, "Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics", *Comput. Meths. Appl. Meth. Engng.*, Vol.56, 1986, pp.61-81
7. W.K. Liu, T. Belytschko and A. Mani, "Transient probabilistic systems", *Comput. Meths. Appl. Meth. Engng.*, Vol.67, 1988, pp.27-54
8. S.C. Lin and T.Y. Kam, "Buckling analysis of imperfect frames using a stochastic finite element methods", *Comput. & Struct.*, Vol.42, No. 6, 1992, pp.895-901
9. P.D. Spanos, G. Roger, "Polynomial Chaos in stochastic finite elements", *J. Appl. Mech.*, Vol.57, 1990, pp.197-202
10. P.D. Spanos, G. Roger, "Stochastic finite element expansion for random media", *J. Engng. Mech.*, Vol.115, No.5, 1989, pp.1035-1053
11. Roger G. Ghanem and Pol D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York, 1991
12. W.M.G. Courage and P.J.G. Schedurs, "Effective Material Parameters for Composites with Randomly Oriented Short Fibers", *Comp. & Struct.*, Vol.44, No.6, 1992, pp.1179-1185.
13. J.C. Halpin, "Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites", *J. Composite Materials*, Vol.3, 1969, pp.732-734.
14. J.C. Halpin, *Primer on Composite Materials: Analysis*, Technomic Publishing Company, Inc., 1984
15. J.C. Halpin and N.J. Pagano, "The Laminated Approximation for Randomly Oriented Fibrous", *J. Composite Materials*, Vol.3, 1969, pp.720-724.
16. Robert M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, 1975